0から分かる「多様体論の準備」

〜集合と位相の総復習〜

平成 22 年 12 月 19 日

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

制作:数理科学研究会

1　なぜ授業内容が分からなくなるのか

「大学では一般的に, 講義及び演習においては, 90 分/コマ (1.5 時間) × 15 週 = 22.5 時間の授業を学修した者に対して 2 単位を与える, 1 単位の実授業時間は 11.25 時間となる.高度に専門的な教育研究を目的とする大学の講義を学修するには, 15 実時間（もしくは 11.25 実時間）の講義に対して 30 実時間（もしくは 33.75 実時間）の予習・復習・課題などの自主学習が必要である.」と文部科学省が定めている.つまりそれ相応の勉強時間が求められているのである.
ここで自分の勉強時間を振り返ってみよう, 上で定められた勉強時間に達しているだろうか？(別に長ければ良いって分けじゃない) 要は, 授業で習ったことを概ね理解してれば良いと思う.そこで前期の集合と位相の授業内容を思い出してみよう.授業内容はかなり難しかったはずだ, 集合の濃度や距離空間, 位相について初めて習ったわけだから新しい記号や言葉, 定義や定理のオンパレードで「授業を受けていれば理解できる」という内容では決して無かったと思う.それに加えて期末テストの内容が簡単であったので, そこまで深く授業でやった内容を復習しなくても点数は取れたはずだ.ここが問題である.仮に単位を取れたとしても授業内容は半分も理解しておらず, 加えて夏季休暇でほとんど忘れてしまう.しかし後期の授業では集合と位相は概ね理解しているものだとして, 新たな授業が始まっていくから大変だ, 先生が使っている数学用語の意味が分からない→授業内容が分からないが自分で調べようとしない→もはや先生が何を言っているのか理解できない, 三年前期からは, その授業前提の新たな講義が始まり, 分からない無限ループに陥る.特にこの「集合と位相」は数学のあらゆる場所に出てくるので, どのみち数理科学科を卒業しようと思ったらどこかで一回は苦労して理解しなければいけない壁なのである.どうだろう, 今回を期に「集合と位相」について今一度勉強しなおしてみては…

2　距離 (distance) の定義

X : 空でない集合, $d : X \times X \to \mathbb{R}$　が次の三条件を満たすとする.

$[D_1]$　$\forall x, y \in X$ に対し $d(x,y) \geq 0$ であり $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$[D_2]$　$\forall x, y \in X$ に対し $d(x,y) = d(y,x)$

$[D_3]$　$\forall x, y, z \in X$ に対し $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$　(三角不等式)

この時, 関数 (function)d を X 上の距離関数 (distance function) といい (X,d) を距離空間 (metric space) という.

※シュワルツの不等式

$\forall a_1, \cdots, a_n,\ b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

この不等式は集合論等の証明でよく使う.

2.1 ε-近傍 (ε-neighborhood)

距離空間 (X,d), $a\in X,\varepsilon>0$ に対して

$$N(a;\varepsilon)=\{x\in X\mid d(a,x)<\varepsilon\}$$

を点 a の$\varepsilon-$近傍といい $N(a;\varepsilon)$ で表す.

$a\in X,\ A\subset X,\ ^{\exists}\varepsilon>0,\ N(a;\varepsilon)\subset A$ を満たすとき, a を A の内点 (interior point) といい, A の内点全体の集合を A の内部 (interior) といい A^iで表す.

$a\in X,\ A\subset X,\ ^{\exists}\varepsilon>0,\ N(a;\varepsilon)\cap A=\phi$を満たすとき, a を A の外点 (exterior point) といい, A の外点全体の集合を A の外部 (exterior) といい A^eで表す.このとき, $A^e=(A^c)^i$が成り立つ.

さらに, $a\in X,\ A\subset X,\ ^{\forall}\varepsilon>0,\ N(a;\varepsilon)\cap A\neq\phi$かつ $N(a;\varepsilon)\cap A^c\neq\phi$を満たすとき, a を A の境界点といい境界点全体の集合を A の境界といい, A^fで表す.明らかに

$$X=A^i\cup A^e\cup A^f \qquad\qquad (\text{非交和})$$

が成り立つ.

2.2 開集合 (open set), 閉集合 (closed set)

距離空間 (X,d) に対して $A\subset X,\ A=A^i$となるとき A を (X,d) の開集合, $A=A^i\cup A^f$となるとき A を (X,d) の閉集合という.

3 ユークリッド空間 (Euclidean space)

$\mathbb{R}^n$上にユークリッド距離 (Euclidean metric)$d^{(n)}(x,y)$ を定めた距離空間 $(\mathbb{R}^n,d^{(n)})$ を n 次元ユークリッド空間という.

$$d^{(n)}(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

3.1 ユークリッド空間の ε-近傍

n 次元ユークリッド空間において, $a\in\mathbb{R}^n,\ ^{\forall}\varepsilon>0$ に対して

$$B_n(a;\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid d^{(n)}(a,x)<\varepsilon\}$$

を a を中心としεを半径とする開球体 (open ball) といい, $B_n(a;\varepsilon)$ で表す.このとき $B_1(a;\varepsilon)$ を開区間 (open interval), $B_2(a;\varepsilon)$ を開円板という.

$$S_n(a;\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid d^{(n)}(a,x)=\varepsilon\}$$

を a を中心とし, εを半径とする球面 (sphere) といい, $S_n(a;\varepsilon)$ で表す.

4 位相 (topology)

X を空でない集合とする.X の部分集合の族 (すなわち, X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ の部分集合)$\mathcal{O}$ は, 次の条件を満たすとき集合 X の位相であるという.

$[\mathbf{O}_1]$ $X \in \mathcal{O},\ \phi \in \mathcal{O}$

$[\mathbf{O}_2]$ $O_1, \cdots, O_k \in \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad O_1 \cap \cdots \cap O_k \in \mathcal{O}$

$[\mathbf{O}_3]$ $(O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $\mathcal{O}$ の元からなる集合系 $\Rightarrow$ $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

位相 $\mathcal{O}$ を与えられた集合 X を位相空間 (topological space) といい $(X, \mathcal{O})$ で表す.$\mathcal{O}$ に属する X の部分集合を $(X, \mathcal{O})$ の開集合 (厳密には $\mathcal{O}$ − 開集合) という.

※集合系

空でない集合Λからある集合族 (集合を元とする集合) への写像 A のことをΛ上の集合系といい,
$(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ で表す.$A : \Lambda \to \{A_\lambda\}$ $(1 \in \Lambda \mapsto A_1 \in \{A_\lambda\})$ ※ A_1は集合

4.1 n 次元ユークリッド空間の開集合系 $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}^n$ の位相である

※ n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$の開集合全体の集合を $\mathbb{R}^n$の開集合系という

証明

$[O_1]$
$^\forall a \in \mathbb{R}^n$について $B_n(a;1) \subset \mathbb{R}^n$が成り立つから, 点 a は $\mathbb{R}^n$の内点である.よって $\mathbb{R}^n$は開集合である.また, $\phi^i = \phi$であるからϕも開集合である.

$[O_2]$
$O_1, O_2, \cdots, O_k \in \mathcal{O}$ とし $O = O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k$とする.$a \in O$ とすれば各 $j (1 \leq j \leq k)$ に対して $a \in O_j$ であり $O_j \in \mathcal{O}$ だから$^\exists \varepsilon_j > 0, B_n(a; \varepsilon_j) \subset O_j$である.そこで$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k\}$ とおけば, 各 j に対して $B_n(a;\varepsilon) \subset O_j \quad (j = 0, 1, \cdots, k)$ となるから $B_n(a;\varepsilon) \subset O$ となり a は O の内点となる.すなわち $O \subset O^i$が示された.したがって $O \in \mathcal{O}$ である.

$[O_3]$
$O_\lambda \in \mathcal{O} (\lambda \in \Lambda)$ とし $O = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$とおく, $a \in O$ とすれば $a \in O_\lambda$となる$\lambda \in \Lambda$が存在し, $O_\lambda \in \mathcal{O}$ だから$^\exists \varepsilon > 0, B_n(a;\varepsilon) \subset O_\lambda$となる.したがって, $B_n(a;\varepsilon) \subset O_\lambda \subset O$ となり, a は O の内点となる.すなわち $O \subset O^i$が示せた.よって $O \in \mathcal{O}$ である.

以上より, n 次元ユークリッド空間の開集合系 $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}^n$の位相であることが示せた.

4.2 離散位相 (discrete topology), 密着位相 (indiscrete topology)

$\mathcal{O} = \mathfrak{P}(x)$ は明らかに X の一つの位相であり, この位相を離散位相といい, 位相空間 $(x, \mathfrak{P}(x))$ を離散空間 (discrete space) という.

上で証明したように n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合系は $\mathbb{R}^n$ の一つの位相である.この位相を $\mathbb{R}^n$ の「通常の位相」と呼ぶ.また, 証明はしていないが, 集合 X について距離空間 (X, d) の開集合系は X の一つの位相であり, この位相を d によって定まる距離位相 (metric topology) という.集合 X 上の位相 $\mathcal{O}$ が一つの距離位相に一致するとき, この位相は距離づけ可能, または距離化可能 (metrizable) であるという.

5　近傍系と連続写像

5.1　開近傍 (open neighborhood), 近傍系 (system of neighborhoods)

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.X の部分集合 N が X の点 a の近傍であるとは, a が N の内点となることである.特に点 a を含む開集合は, すべて点 a の近傍である.これを点 a の開近傍という.位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において, 点 a の近傍全体の集合を点 a の近傍系といい $\mathfrak{N}(a)$ で表す.

5.2　連続写像 (continuous mapping)

5.2.1　連続 (continuous)

$(X_1, \mathcal{O}_1)$ および $(X_2, \mathcal{O}_2)$ を位相空間とする.写像 $f : X_1 \to X_2$ が X_1 の点 x で連続であるとは位相空間 $(X_2, \mathcal{O}_2)$ における点 $f(x)$ の近傍 N の f による逆像 $f^{-1}(N)$ が, 常に位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ における点 x の近傍になることである.

5.2.2　定理 (theorem)

$(X_1, \mathcal{O}_1)$ および $(X_2, \mathcal{O}_2)$ を位相空間とする.写像 $f : X_1 \to X_2$ について, 次の四つの条件は互いに同等である.

(1) f は X_1 の各点で連続である.

(2) $\mathcal{O}_2$ − 開集合 O の f による逆像 $f^{-1}(O)$ は, 常に $\mathcal{O}_1$ − 開集合である.

(3) $\mathcal{O}_2$ − 閉集合 F の f による逆像 $f^{-1}(F)$ は, 常に $\mathcal{O}_1$ − 閉集合である.

(4) X_1 の部分集合 A に対して, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が常に成り立つ.

上の定理の条件 (1)〜(4) の中の一つが成り立つとき (従って, 条件 (1)〜(4) が全て成り立つとき), 写像 $f : X_1 \to X_2$ は連続であるといい, f を位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ から位相空間 $(X_2, \mathcal{O}_2)$ への連続写像という.

5.3　同相写像 (homeomorphism)

$(X_1, \mathcal{O}_1)$ および $(X_2, \mathcal{O}_2)$ を位相空間とする.写像 $f : X_1 \to X_2$ が全単射であり, f が位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ から $(X_2, \mathcal{O}_2)$ への連続写像であるとき, 写像 f は位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ から位相空間 $(X_2, \mathcal{O}_2)$ の上への同相写像であるといい, このような写像 f が存在するとき, 位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ と位相空間 $(X_2, \mathcal{O}_2)$ は同相 (homeomorphic) または位相同型であるという.

6　ハウスドルフ空間 (Hausdorff space)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を定義するとき, $\mathcal{O}$ は位相の条件 $[O_1], [O_2], [O_3]$ を満たすことの他に, 何ら制限を設けなかった. したがって一般的な位相空間の仲間には異常な性質をもつものも含まれている. このような"変な空間"を当面の議論から除外するために次のような公理を考える.

6.1　ハウスドルフの分離公理

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の $^\forall p, q \in X\ (p \neq q)$, p の開近傍 U, q の開近傍 V に対して $U \cap V = \phi$ であるものが存在する.

この公理はすべての位相空間に成り立つ分けではない.

このハウスドルフの分離公理の成立する位相空間をハウスドルフ空間, またはハウスドルフであるという.
※多様体の議論に現れる空間はすべてハウスドルフ空間である.

7　コンパクト性

7.1　開被覆 (open covering)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開集合からなる族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ があるとする. X が $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で被覆 (cover) されるとは

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \qquad \text{が成り立つことである.}$$

このとき, 開集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ のことを, X の開被覆という. X の部分集合 K の被覆についても同様に定義する. すなわち X の開集合族 $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ によって K が被覆されるとは

$$K \subset \bigcup_{\beta \in B} V_\beta \qquad \text{が成り立つことである.}$$

このとき $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ を K の開被覆という.

7.2　ハイネ-ボレル (Heine-Borel) の被覆定理

K を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の有界な閉集合とする. そして $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を K の任意の与えられた開被覆とする. このとき $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の中から有限個の開集合 $U_{\alpha(1)}, U_{\alpha(2)}, \cdots, U_{\alpha(k)}$ を取り出して

$$K \subset U_{\alpha(1)} \bigcup U_{\alpha(2)} \bigcup \cdots \bigcup U_{\alpha(k)} \qquad \text{が成り立つように出来る.}$$

すなわち $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 K については, K の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ から, 有限個の開集合からなる開被覆 $\{U_{\alpha(1)}, U_{\alpha(2)}, \cdots, U_{\alpha(k)}\}$ が取り出せる. このとき $\{U_{\alpha(1)}, U_{\alpha(2)}, \cdots, U_{\alpha(k)}\}$ を $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の有限部分被覆 (finite subcovering) という.

上の定理によれば, $\mathbb{R}^n$ の中の有界閉集合は, 開被覆に関して特別な性質を持っているわけである. 有限部分被覆が取り出せたからと言って何が有り難いのか, はじめのうちは良く分からないかも知れないが, それは議論を進めて行くうちに明らかになってくると思う.

7.3 コンパクト空間 (compact space)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 A について任意の開被覆から有限部分被覆を持つとき A をコンパクト集合 (compact set) といい, A はコンパクトであるという.位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の X がコンパクト集合であるとき位相空間 $(X, \mathcal{O})$ をコンパクト空間といい, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトであるという.

7.3.1 コンパクト集合の中の閉集合はコンパクトである

証明

X を位相空間とし $A \subset B \subset X$, B : コンパクト集合, A : 閉集合
$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ を A の任意の開被覆とする.$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \cup \{A^c\}$ を考えると, これは B の開被覆になる.なぜなら A^cは A が閉集合だから開集合となる.$x \in B$ とすると $x \in A$ または $x \in B - A, x \in A$ なら x はある U_αに含まれるし, $x \in B - A$ なら x は A^cに含まれる.よって

$$B \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \cup A^c \qquad \text{となる.}$$

いま, B はコンパクトだから

$$^\exists \alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \cdots, \alpha_{(k)} \in \Lambda, \;\; B \subset U_{\alpha(1)} \bigcup U_{\alpha(2)} \bigcup \cdots \bigcup U_{\alpha(k)} \bigcup A^c$$

最後の A^cは不要だが, $\subset$ は当然成り立つ.$A \subset B$ かつ $A \cap A^c = \phi$だから $A \subset U_{\alpha(1)} \cup U_{\alpha(2)} \cup \cdots \cup U_{\alpha(k)}$ が成り立ち, A は $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ の中の有限個で覆えた, よって A はコンパクトである.

7.4 局所コンパクト (locally compact)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の任意の点に対してコンパクトな近傍が少なくとも一つ存在するとき位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は局所コンパクトであるという.位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がコンパクト空間ならば位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は局所コンパクトである.実際, X の各点のコンパクトな近傍として, X 自身を取り得るからである.

7.5 局所有限 (locally finite)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の二つの被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{V_\beta\}_{\beta \in B}$において$^\forall U \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$に対して$^\exists V \in \{V_\beta\}_{\beta \in B}$があって $U \subset V$ となるとき $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$は $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$より細かい被覆であるという.
X の被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$が局所有限であるとは, X の任意の点 x に対して適当な近傍 $V(x)$ を取れば $V(x)$ と交わる $U \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$は高々有限個であるときをいう.

7.6 パラコンパクト (paracompact)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$に対し, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$よりも細かい局所有限な開被覆 $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$が存在するとき, X はパラコンパクトであるという.

参考文献

[1] 松本幸夫 : 多様体の基礎，1988 年，東京大学出版会

[2] 服部晶夫 : 多様体，1976 年，岩波書店

[3] 森田茂之 : 微分形式の幾何学，2005 年，岩波書店

[4] 荻上紘一 : 多様体，1997 年，共立出版

[5] 内田伏一 : 集合と位相，1986 年，裳華房

[6] 一樂重雄 : 集合と位相そのまま使える答えの書き方，2001 年，講談社