ゼータ関数について

芝浦工業大学　数理科学研究会

平成 24 年 11 月 2 日

制作:深谷徹, 岩崎翔太, 江尻早織, 清水雄斗

単語帳

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ \prod_{k=1}^{n} a_k &= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n\end{aligned}$$

マクローリン展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \ (f^{(n)} \text{は第} \ n \ \text{次導関数})$$

　フーリエ級数展開

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx\end{aligned}$$

整数 a, b, 自然数 m について, 整数 k を用いて

$$a - b = km$$

と表せるとき,

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す. つまり a を m で割った余り r と,b を m で割った余り r が等しい. $(0 \leqq r < m)$

$$L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad (:= \cdots \text{右式で左式を定義する.})$$

目 次

1　研究背景 **1**

2　ゼータ関数 **1**

2.1　$\zeta(2)$ 1

2.1.1　オイラーによる証明 1

2.1.2　フーリエ級数展開による証明 1

2.2　正の偶数の場合 2

2.2.1　公式の導出 2

2.2.2　発見 8

2.2.3　フーリエ級数展開 10

2.3　負の整数 12

3　今後の課題 **14**

4　参考文献 **14**

1　研究背景

当初「素数定理の証明」についての研究を複素解析やゼータ関数の視点から試みようとした.「素数定理の証明」には至らなかったが今回は「ゼータ関数」について取り上げた.

2　ゼータ関数

2.1　$\zeta(2)$

$\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ の証明.

2.1.1　オイラーによる証明

オイラーの発見した sin 関数の積公式

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

を用いる. 左辺をマクローリン展開して,

$$(\text{左辺}) = 1 - \frac{\pi^2}{3!}x^2 + \cdots$$

となる. 一方, 右辺も展開すると,

$$(\text{右辺}) = 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) x^2 + \cdots .$$

また, これは x についての恒等式なので, x^2 の係数は等しい. よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3!}$$
$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

となる.

2.1.2　フーリエ級数展開による証明

$f(x) = x^2$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ をフーリエ級数展開する. $f(x)$ は明らかに偶関数なので, sin の係数はすべて 0 になる.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

a_n(n は 1 以上の整数) について,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \left(\frac{1}{n}\sin nx\right)' dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (x^2)'\frac{1}{n}\sin nx dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 - \int_0^{\pi}\frac{2}{n}x\sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{n}\int_0^{\pi}(-x\sin nx)dx = \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\left(\frac{1}{n}\cos nx\right)' dx \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(\left[x\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x)'\frac{1}{n}\cos nx dx\right) = \frac{4}{n\pi}\left(\left(\frac{\pi}{n}\cos n\pi - 0\right) - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx dx\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cos n\pi - \left[\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}\right) = \frac{4}{n\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cos n\pi - 0\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\frac{\pi}{n}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n = (-1)^n\frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

以上より, $a_0 = \dfrac{\pi^2}{3},\ a_n = (-1)^n\dfrac{4}{n^2}\ (n \geqq 1)$ となる. これを,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

に代入して,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx.$$

さらに, $x = \pi$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos n\pi \\
\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n \\
\frac{2\pi^2}{3} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \\
\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

2.2 正の偶数の場合

2.2.1 公式の導出

まず, $\tan\theta = \dfrac{e^{2i\theta}-1}{i(e^{2i\theta}+1)}$ を示す.

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\
e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \\
e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2\cos\theta \\
e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= 2i\sin\theta \\
\cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\
\sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}{\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \\
&= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} \\
&= \frac{e^{2i\theta} - 1}{i(e^{2i\theta} + 1)}.
\end{aligned}
$$

一般の正の偶数の場合を考える．まず, 以下のような関数を定義する．

$$
h_1(t) = \frac{1+t}{2(1-t)},\ h_{n+1}(t) = t \cdot \frac{d}{dt} h_n(t)\ (n \geqq 1).
$$

複素数かつ整数でない x を用いて $t = e^{2\pi i x}$ とすると, 次の式が成り立つ．

$$
h_r(t) = (r-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^r \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^r}.
$$

証明

$$
\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)
$$

両辺の自然対数をとって,

$$
\begin{aligned}
\log\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \\
\log\left(\sin(\pi x)\right) - \log(\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)
\end{aligned}
$$

両辺微分して,

$$
\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} - \frac{\pi}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\dfrac{2x}{n^2}}{1 - \dfrac{x^2}{n^2}}
$$

$$
\frac{\pi}{\tan\pi x} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{n^2 - x^2}
$$

$$
\frac{\pi}{\tan\pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}
$$

$$
\frac{\pi}{\tan\pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-n)+(x+n)}{(x+n)(x-n)}
$$

$$
\frac{\pi}{\tan\pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)
$$

$$
\frac{\pi}{\tan\pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{x+n}
$$

$$
\frac{\pi}{\tan\pi x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+n}
$$

$$\frac{i\pi(e^{2i\pi x}+1)}{e^{2i\pi x}-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+n}$$

$$-2\pi i \cdot \frac{1+e^{2i\pi x}}{2(1-e^{2i\pi x})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+n}$$

$$-2\pi i \cdot \frac{1+t}{2(1-t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+n}$$

$$-2\pi i h_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+n}$$

$$h_1(t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+n}$$

よって, $r=1$ のとき成り立つ.
ここで, $t \cdot \dfrac{d}{dt} f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \dfrac{d}{dx} f(e^{2\pi i x})$ ($f(t)$ は t で微分可能な関数) を示す.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= t \cdot f'(t). \\
(\text{右辺}) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot f'(e^{2\pi i x})(e^{2\pi i x})' \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot f'(e^{2\pi i x}) e^{2\pi i x} \cdot 2\pi i \\
&= e^{2\pi i x} f'(e^{2\pi i x}).
\end{aligned}$$

よって成り立つ.
$r=k$ のとき成り立つとする. つまり,

$$h_k(t) = (k-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$$

が成り立つとする. $r=k+1$ のとき,

$$h_k(t) = (k-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$$

の左辺に $t\dfrac{d}{dt}$, 右辺に $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{dx}$ を施すと,

$$t\frac{d}{dt} h_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dx}(k-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$$

$$h_{k+1}(t) = \frac{1}{2\pi i}(k-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-k}{(x+n)^{k+1}}$$

$$h_{k+1}(t) = k! \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{k+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{k+1}}$$

となり, $r=k+1$ で成り立つ.
以上よりすべての自然数 r で成り立つ. N を 2 以上の自然数, χ を $\bmod N$ の Dirichlet 指標とする. r を自然数とし, $\chi(-1)=(-1)^r$ と**仮定**する. このとき,

$$L(r,\chi) = \frac{1}{(r-1)!} \cdot \left(-\frac{2\pi i}{N}\right)^r \cdot \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N-1} \chi(a) h_r(e^{2\pi i a/N})$$

が成り立つ.

証明

$\displaystyle\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)}{\left(\frac{a}{N}+n\right)^r}$ について, $n \geqq 0$ のとき,

$$\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)}{\left(\frac{a}{N}+n\right)^r}=\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)N^r}{(a+Nn)^r}$$

$a \equiv a+Nn \pmod N$ より,

$$=\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a+Nn)N^r}{(a+Nn)^r}=N^r\sum_{m=Nn+1}^{N(n+1)-1}\frac{\chi(m)}{m^r}.$$

$n<0$ のとき $n'=-n-1$ とおくと,

$$\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)}{\left(\frac{a}{N}+n\right)^r}=\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)}{\left(\frac{a}{N}-1-n'\right)^r}=\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)}{\left(\frac{a-N}{N}-n'\right)^r}$$

$$=\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)}{\left(-\left(\frac{N-a}{N}+n'\right)\right)^r}=\sum_{a=1}^{N-1}\frac{(-N)^r\chi(a)}{(N-a+n'N)^r}$$

$b=N-a$ とおく

$$=\sum_{b=1}^{N-1}\frac{(-N)^r\chi(N-b)}{(b+n'N)^r}$$

$N-b \equiv -b \pmod N$ より,

$$=\sum_{b=1}^{N-1}\frac{(-N)^r\chi(-b)}{(b+n'N)^r}$$

$\chi(-b)=\chi(-1)\chi(b)$ より,

$$=\sum_{b=1}^{N-1}\frac{(-N)^r\chi(-1)\chi(b)}{(b+n'N)^r}$$

仮定より $\chi(-1)=(-1)^r$. よって,

$$=\sum_{b=1}^{N-1}\frac{N^r\chi(b)}{(b+n'N)^r}$$

$$=N^r\sum_{m=Nn'+1}^{N(n'+1)-1}\frac{\chi(m)}{m^r}.$$

$$h_r(e^{2\pi ix})=(r-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^r\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^r}$$

$x=\dfrac{a}{N}$ を代入すると,

$$h_r(e^{2\pi i a/N})=(r-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^r\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{a}{N}+n\right)^r}$$

両辺に $\chi(a)$ をかけて,

$$\chi(a)h_r(e^{2\pi i a/N})=(r-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^r\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\chi(a)}{\left(\dfrac{a}{N}+n\right)^r}$$

$a=1,\cdots,N-1$ で和をとると,

$$\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)h_r(e^{2\pi i a/N})=(r-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^r\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)}{\left(\dfrac{a}{N}+n\right)^r}$$

$n\geqq 0$ のとき $\displaystyle\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)}{\left(\dfrac{a}{N}+n\right)^r}=N^r\sum_{m=Nn+1}^{N(n+1)-1}\frac{\chi(m)}{m^r}$,

$n<0$ のとき $\displaystyle\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)}{\left(\dfrac{a}{N}+n\right)^r}=N^r\sum_{m=Nn'+1}^{N(n'+1)-1}\frac{\chi(m)}{m^r}$ $(n'=-n-1)$ より,

$$\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)h_r(e^{2\pi i a/N})=(r-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^r\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}N^r\sum_{m=Nn'+1}^{N(n'+1)-1}\frac{\chi(m)}{m^r}+\sum_{n=0}^{\infty}N^r\sum_{m=Nn+1}^{N(n+1)-1}\frac{\chi(m)}{m^r}\right)$$

$$=(r-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^rN^r\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{m=Nn'+1}^{N(n'+1)-1}\frac{\chi(m)}{m^r}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=Nn+1}^{N(n+1)-1}\frac{\chi(m)}{m^r}\right)$$

$$=(r-1)!\left(-\frac{N}{2\pi i}\right)^r\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{m=Nn'+1}^{N(n'+1)-1}\frac{\chi(m)}{m^r}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=Nn+1}^{N(n+1)-1}\frac{\chi(m)}{m^r}\right)$$

ここで, $\chi(kN)=0(k$ は整数$)$ より,

$$=(r-1)!\left(-\frac{N}{2\pi i}\right)^r\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{m=Nn'+1}^{N(n'+1)}\frac{\chi(m)}{m^r}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=Nn+1}^{N(n+1)}\frac{\chi(m)}{m^r}\right)$$

また, $n=-1,-2,-3,\cdots$ のとき, $n'=0,1,2,\cdots$ より,

$$=(r-1)!\left(-\frac{N}{2\pi i}\right)^r\left(\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m=Nn'+1}^{N(n'+1)}\frac{\chi(m)}{m^r}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=Nn+1}^{N(n+1)}\frac{\chi(m)}{m^r}\right)$$

$$=(r-1)!\left(-\frac{N}{2\pi i}\right)^r\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m^r}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m^r}\right)$$

$$=(r-1)!\left(-\frac{N}{2\pi i}\right)^r2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m^r}$$

$$=(r-1)!\left(-\frac{N}{2\pi i}\right)^r2L(r,\chi).$$

よって,

$$\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)h_r(e^{2\pi i a/N})=(r-1)!\left(-\frac{N}{2\pi i}\right)^r2L(r,\chi)$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\cdot\left(-\frac{2\pi i}{N}\right)^r\cdot\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)h_r(e^{2\pi ia/N})=L(r,\chi)$$

$$L(r,\chi)=\frac{1}{(r-1)!}\cdot\left(-\frac{2\pi i}{N}\right)^r\cdot\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)h_r(e^{2\pi ia/N}).$$

$$L(r,\chi)=\frac{1}{(r-1)!}\cdot\left(-\frac{2\pi i}{N}\right)^r\cdot\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)h_r(e^{2\pi ia/N})$$

について, $N=2$ のとき, $\chi(2n)=0,\ \chi(2n-1)=1$ (n は整数) となるので, $\chi(-1)=1$. また, 上の式の仮定 $\chi(-1)=(-1)^r$ より, r が正の偶数のときのみ上の式は成り立つ. 以上のことをふまえて上の式に $N=2$ を代入すると,

$$L(r,\chi)=\frac{1}{(r-1)!}\cdot\left(-\frac{2\pi i}{2}\right)^r\cdot\frac{1}{2}h_r(e^{2\pi i/2})$$

$$L(r,\chi)=\frac{1}{(r-1)!}\cdot(-\pi i)^r\cdot\frac{1}{2}h_r(e^{i\pi})$$

$e^{i\pi}=-1$ より,

$$L(r,\chi)=\frac{1}{(r-1)!}\cdot(-\pi i)^r\cdot\frac{1}{2}h_r(-1).$$

また,

$$L(r,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^r}$$

$\chi(2k)=0$ (k は整数) より,

$$\begin{aligned}
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^r}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^r}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}-\frac{1}{2^r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}\\
&=\left(1-\frac{1}{2^r}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}\\
&=\left(1-\frac{1}{2^r}\right)\zeta(r).
\end{aligned}$$

以上より,

$$L(r,\chi)=\frac{1}{(r-1)!}\cdot(-\pi i)^r\cdot\frac{1}{2}h_r(-1)$$

$$L(r,\chi)=\left(1-\frac{1}{2^r}\right)\zeta(r)$$

よって,

$$\left(1-\frac{1}{2^r}\right)\zeta(r)=\frac{1}{(r-1)!}\cdot(-\pi i)^r\cdot\frac{1}{2}h_r(-1)$$

$$\frac{2^r-1}{2^r}\zeta(r)=\frac{1}{(r-1)!}\cdot(-\pi i)^r\cdot\frac{1}{2}h_r(-1)$$

$$\zeta(r)=\frac{2^r}{2^r-1}\cdot\frac{1}{(r-1)!}\cdot(-\pi i)^r\cdot\frac{1}{2}h_r(-1).$$

r は正の偶数なので, $r = 2n$ とすると,

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n}}{2^{2n}-1} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} \cdot (-\pi i)^{2n} \cdot \frac{1}{2} h_{2n}(-1)$$
$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2^{2n}-1)\cdot(2n-1)!} \cdot (-1)^n h_{2n}(-1).$$

2.2.2 発見

$h_r(t)$ について以下の式が成り立つことを発見した.

$$h_r(t) = \frac{Q_r(t)}{(1-t)^r}.$$

ただし,

$$Q_r(t) = \sum_{k=1}^{r-1} a_{r,k} t^k,$$
$$a_{2,1} = 1,$$
$$a_{r+1,1} = a_{r,1},$$
$$a_{r+1,n} = n a_{r,n} + (r-n-1) a_{r,n-1} \ (2 \leqq n \leqq r-1),$$
$$a_{r+1,r} = a_{r,r-1}.$$

証明

$r = 2$ のとき, $h_2(t) = \dfrac{t}{(1-t)^2}$ より $a_{2,1} = 1$

$r = k+1$ のとき,

$$h_{k+1}(t) = t\frac{d}{dt}\frac{Q_k(t)}{(1-t)^k} = t \cdot \frac{(1-t)Q'_k(t) + kQ_k(t)}{(1-t)^{k+1}}$$
$$= t \cdot \frac{(1-t)\displaystyle\sum_{m=1}^{k-1} m a_{k,m} t^{m-1} + k \sum_{m=1}^{k-1} a_{k,m} t^m}{(1-t)^{k+1}}$$
$$= \frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{k-1} m a_{k,m} t^m - \sum_{m=1}^{k-1} m a_{k,m} t^{m+1} + k \sum_{m=1}^{k-1} a_{k,m} t^{m+1}}{(1-t)^{k+1}}$$

$l = m+1$ とおくと,

$$= \frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{k-1} m a_{k,m} t^m - \sum_{l=2}^{k} (l-1) a_{k,l-1} t^l + k \sum_{l=2}^{k} a_{k,l-1} t^l}{(1-t)^{k+1}}$$
$$= \frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{k-1} m a_{k,m} t^m + \sum_{l=2}^{k} (k-l+1) a_{k,l-1} t^l}{(1-t)^{k+1}}$$
$$= \frac{a_{k,1} t + \displaystyle\sum_{m=2}^{k-1} m a_{k,m} t^m + \sum_{l=2}^{k-1} (k-l+1) a_{k,l-1} t^l + a_{k,k-1} t^k}{(1-t)^{k+1}}$$

$$= \frac{a_{k,1}t + \sum_{m=2}^{k-1} \left(ma_{k,m} + (k-l+1)a_{k,m-1}\right) t^m + a_{k,k-1}t^k}{(1-t)^{k+1}}$$

また, $h_{k+1}(t) = \dfrac{Q_{k+1}(t)}{(1-t)^k+1} = \dfrac{\sum_{m=1}^{k} a_{k,m}t^m}{(1-t)^k+1}$ より,

$$a_{r+1,1} = a_{r,1}, a_{r+1,n} = na_{r,n} + (r-n-1)a_{r,n-1}\ (2 \leqq n \leqq r-1), a_{r+1,r} = a_{r,r-1}.$$

この関係と $\zeta(2n) = \dfrac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2^{2n}-1)\cdot(2n-1)!} \cdot (-1)^n h_{2n}(-1)$ より, $\zeta(2n)$ を求めるプログラムを C 言語で作成した. 以下ソースコード.

```
#include <stdio.h>
#define PI 3.14159265358979323846264333

int main(void){
    int n,i,j,p,q;
    float a;
    printf("偶数を入れてください\n");
    do{
        scanf("%d",&n);
    }while(n&1);
    p=(1-(n&2))*Q(n);
    q=(((1<<n)-1)<<1);
    for(i=n;--i;){
        j=GCD(p,q);
        p/=j;
        q/=j;
        q*=i;
    }
    printf("zeta(%d)=(%d/%d)*π^%d\n",n,p,q,n);
    return 0;
}

int Q(int r){
    int i,j,k,temp,temp2;
    int *a;
    a=(int *)calloc(sizeof(int)*r);
    a[1]=1;
    for(i=2;i<r;i++){
        temp=a[1];
        k=i+1;
        for(j=2;j<i;j++){
            temp2=a[j];
            a[j]=j*temp2+(k-j)*temp;
```

```
            temp=temp2;
        }
        a[i]=temp;
    }
    temp=0;
    j=-1;
    for(i=1;i<r;i++){
        temp+=j*a[i];
        j=-j;
    }
    free(a);
    return temp;
}

int GCD(int a,int b){
    int temp;
    if(b>a){
        temp=a;
        a=b;
        b=temp;
    }
    while(b){
        temp=a%b;
        a=b;
        b=temp;
    }
    return a;
}
```

2.2.3 フーリエ級数展開

$f(x) = x^{2n}$ (n は自然数) をフーリエ級数展開することで ζ の値を求める.

$$f(x) = x^{2n} \ (n \text{ は自然数})$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2n} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2}{2n+1}\pi^{2n+1}$$

$$= \frac{\pi^{2n}}{2n+1}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2n}\cos mx dx$$

$I(n,m) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^{2n}\cos mx dx$ とすると

$$
\begin{aligned}
I(n,m) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2n}\cos mx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[x^{2n}\frac{\sin mx}{m}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2nx^{2n}\frac{\sin mx}{m}dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{2n}{m}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2n}\sin mx dx\right) \\
&= -\frac{2n}{\pi m}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2n}\sin mx dx \\
&= -\frac{2n}{\pi m}\left(\left[x^{2n-1}\frac{-\cos mx}{m}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(2n-1)x^{2n-2}\frac{-\cos mx}{m}dx\right) \\
&= -\frac{2n}{\pi m}\left(\pi^{2n-1}\frac{(-1)^{m+1}}{m} + \frac{2n-1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2(n-1)}\cos mx dx\right) \\
&= (-1)^m\frac{2n}{m^2}\pi^{2(n-1)} - \frac{2n(2n-1)}{m^2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2(n-1)}\cos mx dx \\
&= (-1)^m\frac{2n}{m^2}\pi^{2(n-1)} - \frac{2n(2n-1)}{m^2}I(n-1,m)
\end{aligned}
$$

よって,

$$I(n,m) = (-1)^m\frac{2n}{m^2}\pi^{2(n-1)} - \frac{2n(2n-1)}{m^2}I(n-1,m)$$

$$I(0,m) = \int_{-\pi}^{\pi} x^0\cos mx dx = 0$$

$$f(x) = \frac{\pi^{2n}}{2n+1} + \sum_{m=1}^{\infty} I(n,m)\cos mx$$

$x = \pi$ を代入して

$$\pi^{2n} = \frac{\pi^{2n}}{2n+1} + \sum_{m=1}^{\infty} I(n,m)(-1)^m$$

$$\frac{2n}{2n+1}\pi^{2n}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m I(n,m)$$

よって,

$I(n,m) = (-1)^m\dfrac{2n}{m^2}\pi^{2(n-1)} - \dfrac{2n(2n-1)}{m^2}I(n-1,m)$, $I(0,m) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^0\cos mx dx = 0$ を再帰的に適用することで ζ の値を求めることができる.

2.3 負の整数

ζ 関数の s の値が負となる場合に ζ がとる値を求める．ここで, 求める式を導出する際に使用する式を紹介する．

定義 1. Hurwitz ζ 関数

$$\zeta(s,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^s}.$$

定義 2. ベルヌーイ数 (B_n)

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n.$$

定義 3. ベルヌーイ多項式

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}{}_nC_iB_ix^{n-i}.$$

定義 4. Γ(ガンマ) 関数

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^s\frac{dt}{t}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n=\frac{te^{xt}}{e^t-1}\text{を証明する.}$$

定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}{}_nC_kB_kx^{n-k}}{n!}t^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_kt^k}{k!}\cdot\frac{x^{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_kt^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!}\right)\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}t^n\right)=\frac{te^{xt}}{e^t-1}.\end{aligned}$$

ということがわかる．
次に $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$ と $B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$ を証明する．
$F(t,x)=\dfrac{te^{xt}}{e^t-1}$ とおく．

$$\begin{aligned}F(t,x)e^t &= \frac{te^{(x+1)t}}{e^t-1}=F(t,x+1),\\ F(t,x)e^t &= \frac{e^t}{e^t-1}te^{xt}=te^{xt}+F(t,x),\\ F(t,x+1) &= te^{xt}+F(t,x),\end{aligned}$$

t^nの係数をみると

$$\frac{B_n(x+1)}{n!}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{B_n(x)}{n!}.$$

これらを比較して $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$ を得る.

$$F(t,1-x)=\frac{te^{(1-x)t}}{e^t-1}=\frac{te^{x(-t)}}{1-e^{-t}}=\frac{(-t)e^{x(-t)}}{e^{-t}-1}=F(-t,x).$$

同様に両辺を比較して $B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$ を得る．また, 上記を用いて

$$\zeta(1-n,x)=-\frac{B_n(x)}{n}$$

を証明する.

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s,x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^s\frac{dt}{t}\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(x+n)^s}\\ &= \int_0^\infty\sum_{n=0}^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{x+n}\right)^s\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

ここで $\left(\dfrac{t}{x+n}\right)$ を u とおくと,

$$\begin{aligned}&= \int_0^\infty\sum_{n=0}^\infty e^{-(x+n)u}u^s\frac{du}{u}\\ &= \int_0^\infty\frac{e^{-xu}}{1-e^{-u}}u^s\frac{du}{u}.\end{aligned}$$

ここで $f(s,u)=\dfrac{e^{-xu}}{1-e^{-u}}u^{s-1}$ とおくと,

$$\Gamma(s)\zeta(s,x)=\int_0^\infty f(s,u)du$$

となる. 次にこれを

$$\int_0^\infty f(s,u)du=\int_0^1 f(s,u)du+\int_1^\infty f(s,u)du$$

と分けて考える.

$\displaystyle\int_1^\infty f(s,u)du$ は, $u\to\infty$ のとき e^{-xu}が急激に 0 に近づくため,
すべての複素数 s について収束して s の正則関数となる.

次に $\displaystyle\int_0^1 f(s,u)du$ について考える. 上で求めた式より

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{B_n(x)}{n!}u^n=\frac{ue^{xu}}{e^u-1}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(s,u)du &= \int_0^1\sum_{n=0}^\infty\frac{B_n(x)}{n!}\cdot(-1)^n u^{n+s-2}du\\ &= (-1)^n\int_0^1 u^{n+s-2}\sum_{n=0}^\infty\frac{B_n(x)}{n!}du\\ &= \sum_{n=0}^\infty\frac{B_n(x)}{n!}\cdot\frac{(-1)^n}{s+n-1}.\end{aligned}$$

また,

$$\lim_{s\to 1-n}(s+n-1)(\Gamma(s)\zeta(s,x)) = \frac{B_n(x)}{n!}\cdot(-1)^n.$$

$n=0$ とおくと $\Gamma(1)=1$ となるので,

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s,x) = B_0(x) = 1$$

が示される.
$n \geq 1$ のとき,

$$\lim_{s\to 1-n}(s+n-1)\Gamma(s) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n-1)!}$$

となる. これは,

$$\zeta(1-n,x) = -\frac{B_n(x)}{n}$$

を示している.

これらより, 以下が成立する

1. $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.
2. r が 2 以上の自然数なら, $\zeta(1-r) = -\frac{1}{r}B_r$.
3. m が負の偶数なら, $\zeta(m)=0$.

証明

$$\zeta(1-r,x) = -\frac{1}{r}B_r(x)$$

r に 1, x に 1 を代入して,

$$\zeta(0) = -B_r(1) = -\frac{1}{2}$$

$r \geq 2$ のとき $B_r(1)=B_r(0)=B_r$. また r が 3 以上の奇数のとき, $B_r=0$ となるので $\zeta(1-r)=0$

最後に例として $\zeta(-1)$ の値を求めてみると,

$$\zeta(-1) = 1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12}$$

となる.

3 今後の課題

今回, 整数の範囲でゼータ関数について研究したが, ゼータ関数は数論やリーマン予想などの多くの課題に取り組むのに必要である. 機会があればゼータ関数の複素数への拡張を理解し, 研究したい.

4 参考文献

[1] 加藤和也, 黒川信重, 斉藤毅, 数論 I Fermat の夢と類体論, 岩波書店, 2005.