麻雀の確率について考えてみる

芝浦工業大学

～清一色はどれだけ難しいのか～

平成 26 年 1 月 16 日

BV12029: 萱沼　孝郎

目 次

1　麻雀のルールについて

1.1　麻雀とは

麻雀は, 4 人のプレイヤーが 34 種類 136 枚の牌を引いてあがりの形をつくることを数回行い, そのあがりでもらえる得点を重ねていくゲームである.

このルールだけ並べると非常に単純である. しかし, あがりの形をつくることは困難である.

1.2　あがりの形

ここであがりの形に関して細かい説明をする.
まずあがりに必要な牌は全部で 14 牌である. その 14 牌が以下の 2 条件を満たすときあがりの形となる.

1. 面子が 4 つ雀頭が 1 つある.
2. 1 飜以上の役がある.

この 2 つだけである. この 2 つについて細かく説明する.

まず 1 の「面子が 4 つ雀頭が 1 つある.」という条件について説明する.
面子とは 3 牌 1 組のものであり順子と刻子の 2 種類がある.
順子とは同一数牌を項数 3 等差 1 の等差数列にした 3 牌の組, 例えば 123 のような 3 組のことである.
刻子とは同一牌 3 牌の組, 例えば 111 のような 3 組のことである.
雀頭とは対子で構成されている. 対子とは同一牌牌の組, 例えば 11 のような 2 組のことである.
その上で 4 つの面子と 1 つの雀頭は互いに独立であれば, 1 の条件を満たす.

次に 2 の「1 飜以上の役がある.」という条件について説明する.
役とは牌の一部またはすべての牌が役を成立させる条件が成りたって成立する.

今回取り上げた役は「清一色」という役で条件は「14 牌すべての牌を同一数牌にすること」である.
そのため清一色の難易度をはかるために 14 牌すべての牌を同一数牌にする確率を考える.

1.3　前提条件

以下の内容は前提条件として, 例外なく認める.

- 牌のくる偏りはなく牌を引く確率は離散型一様分布に従う.
- 他の人の手牌や捨牌や王牌は考えないことにする.
- 目指すものは面前清一色ツモとする.
- ゲーム中に鳴きや槓は行われないとする.
- 他の人はあがらないことにする.

2　同一数牌にするための確率

14 牌すべて同一数牌するための確率を考える．今回は集める数牌を一つに絞って考える．1.3 で述べた前提条件のうえ, まずは初期状態のときを考える.

2.1　初期状態のとき

麻雀の初期状態とは配牌のことである. つまり, ゲーム開始の状態での 14 牌の状態のことをさす.
麻雀の牌の合計数は 136 牌, 手牌は 14 牌であるから確率を求める際には ${}_{136}C_{\mathrm{r}}$ (このとき $0 \leq r \leq 14$) の値が必要となってくるのでその値を利用する.

計算準備 2.1.1

組み合わせの以下の値を利用した.

$$
\begin{aligned}
{}_{136}C_{14} &= 4{,}250{,}305{,}029{,}168{,}216{,}000 && (425\text{ 京})\\
{}_{136}C_{13} &= 483{,}774{,}556{,}165{,}488{,}000 && (48\text{ 京})\\
{}_{136}C_{12} &= 50{,}718{,}300{,}243{,}156{,}000 && (5\text{ 京})\\
{}_{136}C_{11} &= 4{,}868{,}956{,}823{,}342{,}976 && (4868\text{ 兆})\\
{}_{136}C_{10} &= 425{,}067{,}659{,}180{,}736 && (425\text{ 兆})\\
{}_{136}C_{9} &= 33{,}469{,}894{,}423{,}680 && (33\text{ 兆})\\
{}_{136}C_{8} &= 2{,}353{,}351{,}951{,}665 && (2\text{ 兆})\\
{}_{136}C_{7} &= 145{,}944{,}307{,}080 && (1459\text{ 億})\\
{}_{136}C_{6} &= 7{,}858{,}539{,}612 && (78\text{ 億})\\
{}_{136}C_{5} &= 359{,}933{,}112 && (3\text{ 億})\\
{}_{136}C_{4} &= 13{,}633{,}830 && (1363\text{ 万})\\
{}_{136}C_{3} &= 410{,}040 && (41\text{ 万})\\
{}_{136}C_{2} &= 9{,}180\\
{}_{136}C_{1} &= 136\\
{}_{136}C_{0} &= 1
\end{aligned}
$$

1 つの数牌は合計で 36 牌であるので ${}_{36}C_{\mathrm{r}}$ (このとき $0 \leq r \leq 14$) の値も必要となってくる.

計算準備 2.1.2

組み合わせの以下の値を利用した.

$$
\begin{aligned}
{}_{36}C_{14} &= 3,796,297,200 && (37\text{ 億}) \\
{}_{36}C_{13} &= 2,310,789,600 && (23\text{ 億}) \\
{}_{36}C_{12} &= 1,251,677,700 && (12\text{ 億}) \\
{}_{36}C_{11} &= 600,805,296 && (6\text{ 億}) \\
{}_{36}C_{10} &= 254,186,856 && (2\text{ 億}) \\
{}_{36}C_{9} &= 94,143,280 && (9414\text{ 万}) \\
{}_{36}C_{8} &= 30,260,340 && (3026\text{ 万}) \\
{}_{36}C_{7} &= 8,347,680 && (834\text{ 万}) \\
{}_{36}C_{6} &= 1,947,792 && (194\text{ 万}) \\
{}_{36}C_{5} &= 376,992 && (37\text{ 万}) \\
{}_{36}C_{4} &= 58,905 && (5\text{ 万}) \\
{}_{36}C_{3} &= 7,140 \\
{}_{36}C_{2} &= 630 \\
{}_{36}C_{1} &= 36 \\
{}_{36}C_{0} &= 1
\end{aligned}
$$

また, 1 つの数牌に該当しない牌は合計で 100 牌であるので ${}_{100}C_{\mathrm{r}}$ (このとき $0 \leq r \leq 14$) の値も今回使用する.

計算準備 2.1.3

組み合わせの以下の値を利用した.

$$
\begin{aligned}
{}_{100}C_{14} &= 44,186,942,677,323,600 && (4\text{ 京}) \\
{}_{100}C_{13} &= 7,110,542,499,799,200 && (7110\text{ 兆}) \\
{}_{100}C_{12} &= 1,050,421,051,106,700 && (1050\text{ 兆}) \\
{}_{100}C_{11} &= 141,629,804,643,600 && (141\text{ 兆}) \\
{}_{100}C_{10} &= 17,310,309,456,440 && (17\text{ 兆}) \\
{}_{100}C_{9} &= 1,902,231,808,400 && (1\text{ 兆}) \\
{}_{100}C_{8} &= 186,087,894,300 && (1860\text{ 億}) \\
{}_{100}C_{7} &= 16,007,560,800 && (160\text{ 億}) \\
{}_{100}C_{6} &= 1,192,052,400 && (11\text{ 億}) \\
{}_{100}C_{5} &= 75,287,520 && (7528\text{ 万}) \\
{}_{100}C_{4} &= 3,921,225 && (392\text{ 万}) \\
{}_{100}C_{3} &= 161,700 && (16\text{ 万}) \\
{}_{100}C_{2} &= 4,950 \\
{}_{100}C_{1} &= 100 \\
{}_{100}C_{0} &= 1
\end{aligned}
$$

ここで初期状態での 1 つの数牌が r 個 (このとき $0 \leq r \leq 14$) ある確率を求める.
このとき, 全体が 136 牌あるなかで 14 牌があるので, ${}_{136}C_{14}$通りありそのうち r 個が数牌である場合の数は $({}_{36}C_r \cdot {}_{100}C_{14-r})$ 通りあるのでその確率は

$$\frac{{}_{36}C_r \cdot {}_{100}C_{14-r}}{{}_{136}C_{14}}$$

である. この結果は以下のようになった.

計算結果 2.1.4

初期状態での同一数牌が r 牌 (このとき $0 \leq r \leq 14$) ある確率は,

14 牌	$8.931822949 \times 10^{-10}$	(0.0000000893%)
13 牌	$5.436761795 \times 10^{-8}$	(0.00000543%)
12 牌	$1.457731756 \times 10^{-6}$	(0.000145%)
11 牌	$2.285723394 \times 10^{-5}$	(0.00228%)
10 牌	$2.345064290 \times 10^{-4}$	(0.0234%)
9 牌	0.001667601273	(0.166%)
8 牌	0.008486899334	(0.848%)
7 牌	0.03143915418	(3.14%)
6 牌	0.08527870572	(8.52%)
5 牌	0.1687234608	(16.8%)
4 牌	0.2399036708	(23.9%)
3 牌	0.2379209958	(23.7%)
2 牌	0.1556982987	(15.5%)
1 牌	0.06022615511	(6.02%)
0 牌	0.01039618153	(1.03%)

である.

2.2 ゲーム終了時のとき

次にゲームを終了したときに 1 度でも 14 牌すべてが同一数牌になる確率を求める. このとき 17 巡とする. つまり, あと 17 回ひけるという状況である. 初期状態で 136 牌あるうちの 14 牌をもっていたので残り 122 牌のうちから 17 回牌をもっていくということになる. よって 122 あるうちから 17 牌をもっていくと考えることができる. すなわち,${}_{122}C_p$(このとき $0 \leq p \leq 17$) の値が必要となってくるのでその値を利用する. (ここにはあえて値は載せておかない)

122 牌のうち r 牌 (このとき $0 \leq r \leq 14$) 初期状態で指定の数牌があったとすると残りの数牌は（36 − r）牌である.これを（14 − r）牌, つまり手牌が合計 14 牌に少なくとも 1 度はなるので, 全体の余事象をとると確率が求まり, その確率は,

$$1 - \sum_{i=0}^{13-r} \frac{{}_{36-r}C_i \cdot {}_{86+r}C_{17-i}}{{}_{122}C_{17}}$$

である. この結果は以下のようになった.

計算結果 2.2.1

初期状態での同一数牌が r 牌 (このとき $0 \leq r \leq 14$) のとき, ゲームを終了したときに 1 度でも 14 牌すべてが同一数牌になる確率は,

14 牌	1	(100%)
13 牌	0.9785007615	(97.6%)
12 牌	0.8935896280	(89.3%)
11 牌	0.7272331214	(72.7%)
10 牌	0.5128561798	(51.2%)
9 牌	0.3096447040	(30.9%)
8 牌	0.1594821187	(15.9%)
7 牌	0.07002355729	(7.00%)
6 牌	0.02618748800	(2.61%)
5 牌	0.008319524982	(0.831%)
4 牌	0.002232636480	(0.223%)
3 牌	$5.012548611 \times 10^{-4}$	(0.0501%)
2 牌	$9.272661410 \times 10^{-5}$	(0.00927%)
1 牌	$1.380638456 \times 10^{-5}$	(0.00138%)
0 牌	$1.595031629 \times 10^{-6}$	(0.000159%)

である.

2.3 同一色になる確率

初期状態での同一数牌が r 牌 (このとき $0 \leq r \leq 14$) のとき, ゲームを終了したときに初期条件をふまえて同一数牌である確率は初期状態での 1 つの数牌が r 個ある確率とゲームを終了したときに 1 度でも 14 牌すべてが同一数牌になる確率の積すなわち,

$$\frac{{}_{36}C_r \cdot {}_{100}C_{14-r}}{{}_{136}C_{14}} \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^{13-r} \frac{{}_{36-r}C_i \cdot {}_{86+r}C_{17-i}}{{}_{122}C_{17}}\right)$$

である. この結果は以下のようになった.

計算結果 2.3.1

初期条件をふまえたうえで初期状態での同一数牌が r 牌 (このとき $0 \leq r \leq 14$) のとき, ゲームを終了したときに 1 度でも 14 牌すべてが同一数牌になる確率は,

14 牌	$8.931822949 \times 10^{-10}$	(0.0000000893%)
13 牌	$5.319875557 \times 10^{-8}$	(0.00000531%)
12 牌	$1.302613978 \times 10^{-6}$	(0.000130%)
11 牌	$1.662253758 \times 10^{-5}$	(0.00166%)
10 牌	$1.202680713 \times 10^{-4}$	(0.0120%)
9 牌	$5.163639025 \times 10^{-4}$	(0.0516%)
8 牌	0.001353508687	(0.135%)
7 牌	0.002201481414	(0.220%)
6 牌	0.002233235083	(0.223%)
5 牌	0.001403699047	(0.140%)
4 牌	$5.356176870 \times 10^{-4}$	(0.0535%)
3 牌	$1.192590557 \times 10^{-4}$	(0.0119%)
2 牌	$1.443737606 \times 10^{-5}$	(0.00114%)
1 牌	$8.315054584 \times 10^{-7}$	(0.0000831%)
0 牌	$1.658223838 \times 10^{-8}$	(0.00000165%)

である.

また, もちろん牌のくる場合は 0 牌から 14 牌のいずれかで, 任意の共通部分が空集合であることは明らかなので, 全体の 1 度でも 14 牌すべてが同一数牌になる確率は, その和をとってあげればよい. また, 数牌は全て合わせると 3 種類あるのでその値の 3 倍となる. すなわちその確率は,

$$3\sum_{r=0}^{14}\left\{\frac{{}_{36}C_r \cdot {}_{100}C_{14-r}}{{}_{136}C_{14}} \cdot \left(1-\sum_{i=0}^{13-r}\frac{{}_{36-r}C_i \cdot {}_{86+r}C_{17-i}}{{}_{122}C_{17}}\right)\right\}$$

である.

計算結果 2.3.2

ゲームを終了したときに 1 度でも 14 牌すべてが同一数牌になる確率は,

0.02555009297 (2.55%)

である.

3　検証結果と考察

今回の結果で同一数牌で揃う確率はおよそ 2.5%であることがわかった．この数値は予想していた値よりもかなり低い確率となった．特に驚いたことは配牌時にある数牌が 1 枚もない確率はおよそ 1%というかなり低い値となった．また, ほぼ 50%の確率でゲーム終了時に 1 度でも 14 牌すべてが同一数牌になる初期牌数は 10 牌であるということがわかった．研究過程においてかなり驚いた結果の出た研究になった.

4　今後の課題

今回この後向聴数の考察をする予定であったが, プログラムの欠陥などが原因でうまく作ることができなかった．この向聴数の考察をすることが課題としてのこってしまった．そのため, 今後は向聴数を考慮した確率がきちんと求まるようにしていきたい.

5　参考文献

穴太 克則 , 講義:確率・統計，学術図書出版