不完全性定理を勉強する

芝浦工業大学　数理科学研究会
数理科学科 2 年谷野徹

1　概要

ゲーデルの不完全性定理（Godel's incompleteness theorem）とは, クルト・ゲーデルが証明した定理で以下の二つに分かれる.
第 1 不完全性定理
算術を含む公理体系が ω-無矛盾であれば証明も反証もできない命題が存在する.
第 2 不完全性定理
算術を公理体系が無矛盾であれば自身の無矛盾性を証明できない.

この定理を理解している人は大学院生にもほとんどいないし, 数学者でも怪しい人はいるという話を聞いた. 実際にフィールズ賞を受賞した天才数学者小平邦彦にも「勉強したが, 自信がない.」と言わせた. だがしかし, この定理に関して「中学生でもわかる〜」「高校生向けの〜」という解説書はいくつか存在する. これらの書籍とゲーデルの論文を併読することで不完全性定理の証明を理解し自分なりに説明したい.

2　歴史背景

20 世紀の大数学者ダフィット・ヒルベルトは当時の解決すべき未解決問題を 1990 年の国際数学者会議で提示した. これらはヒルベルトの 23 の問題と呼ばれる. この二番目の問題に算術の公理の無矛盾性の証明がある. ヒルベルトは数学の論理で数学が矛盾を含んでいないこと証明できると確信し, 仲間とともに数学の無矛盾性・完全性の証明の準備をしていた. この動きはヒルベルトプログラムと呼ばれ当時世界中から注目された.

しかし 1930 年, クルト・ゲーデルが不完全性定理を証明した. これはヒルベルトプログラムが達成不可能であることを示し, 数学以外にも科学や哲学, 心理学, 現代思想, 情報科学のような論理を扱う人々にも大きな衝撃を与えた.

3　定理の証明

これを理解することがメインになるので以下は概説となる.
形式的体系 PM の決定不能な命題を以下のようにつくる.

$R(n)$: 自由変数を唯一つ持つ PM の論理式が
一列に並べられているときその列の n 番目

$Bew\ x$: x は証明可能な論理式である

$$n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n); n]$$

ある自然数 q に対して $[R(q); q]$ が決定不能であることを示す.

4　今後の課題

今回ほとんど触れることができなかった第一不完全性定理の証明を勉強する.

参考文献

[1] ゲーデル (著作) 林晋/八杉満利子 (訳・解説), 不完全性定理, 岩波文庫
[2] 前原昭二, 数学基礎論入門, 朝倉書店
[3] 廣瀬健・横田一正, ゲーデルの世界-完全性定理と不完全性定理-, 海鳴社