ゼータ関数

芝浦工業大学　数理科学研究会

長田　祐輝

～芝浦祭研究発表～

2014 年 10 月 31 日

目 次

1 $\zeta(2)$ の値の求め方

リーマンのゼータ関数とは

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

で定義されるものである.

この $\zeta(s)$ について $\zeta(2)$ の値を求めようと思う.

<u>$\zeta(2)$ の値の求め方</u>

$c=\sin x$ (c は定数, $c\neq 0$) の右辺をマクローリン展開すると,

$$c=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

となる. 両辺を c で割って移項すると,

$$1-\frac{x}{c}+\frac{x^3}{3!c}-\frac{x^5}{5!c}+\cdots=0$$

となる. この解を $a_1,a_2,a_3,\cdots$ とすると, 左辺は次のように因数分解できる.

$$1-\frac{x}{c}+\frac{x^3}{3!c}-\frac{x^5}{5!c}+\cdots=\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\left(1-\frac{x}{a_3}\right)\cdots$$

右辺を展開して x の係数を調べると,

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots \tag{1}$$

次に x^2 の係数を調べると,

$$0=\sum_{i<j}\frac{1}{a_ia_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\cdots\right) \tag{2}$$

(1) を (2) に代入すると,

$$\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\cdots \tag{3}$$

さて, $c=\sin x$ の解 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ は a_1 を用いて次のように表される.

$$\begin{cases} a_1+2k\pi, \\ -a_1+(2k+1)\pi \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots) \end{cases} \tag{4}$$

ここで, $c=1$ とし, 絶対値の小さい順番に $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ とすると, (4) は,

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ -\frac{7}{2}\pi,\ -\frac{7}{2}\pi,\cdots \tag{5}$$

となる. 同じ数が 2 回出てくるのは重解のためである. なぜ重解も考慮しなければいけないのかと思った人もいるだろうが, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ は $1=\sin x$ の解すなわち $1-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}-\cdots=0$ の解であり, 左辺は今までの考察より, $\left(1-\frac{x}{\frac{\pi}{2}}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{\pi}{2}}\right)\left(1-\frac{x}{-\frac{3}{2}\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-\frac{3}{2}\pi}\right)\cdots=0$ のように因数分解できるから, 重解も考慮しなければならない. $c=1$ として, (5) を (1) 及び (3) に代入して,

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{-\frac{3}{2}\pi} + \frac{1}{-\frac{3}{2}\pi} + \frac{1}{\frac{5}{2}\pi} + \frac{1}{\frac{5}{2}\pi} + \frac{1}{-\frac{7}{2}\pi} + \frac{1}{-\frac{7}{2}\pi} + \cdots \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} - \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{5\pi} + \frac{2}{5\pi} - \frac{2}{7\pi} - \frac{2}{7\pi} + \cdots \\
&= 2 \times \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)^2} + \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\pi\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\pi\right)^2} + \frac{1}{\left(-\frac{7}{2}\pi\right)^2} + \frac{1}{\left(-\frac{7}{2}\pi\right)^2} + \cdots \\
&= \frac{2^2}{\pi^2} + \frac{2^2}{\pi^2} + \frac{2^2}{3^2\pi^2} + \frac{2^2}{3^2\pi^2} + \frac{2^2}{5^2\pi^2} + \frac{2^2}{5^2\pi^2} + \frac{2^2}{7^2\pi^2} + \frac{2^2}{7^2\pi^2} + \cdots \\
&= 2 \times \frac{2^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

を得る. よって

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\zeta(2) &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots \\
&= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\zeta(2)
\end{aligned}
$$

であり,

$$\zeta(2) = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

となる.

2 ベルヌーイ数の漸化式の証明

$f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ を

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

としたときの B_n をベルヌーイ数という. $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ を微分していけば, ベルヌーイ数を求めることはできるが, 通常は漸化式

$$\begin{aligned} &B_0=1 \\ &B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n+1}C_kB_k \quad (n\geq 1) \end{aligned}$$

を用いて求める. この漸化式は次のように証明できる:

証明

e^x をマクローリン展開すると,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

より,

$$e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

であり、$x\neq 0$ のとき,

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots$$

が成り立つ.

また, $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ とおき, $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ と展開できたとすると, $\dfrac{x}{e^x-1}\times\dfrac{e^x-1}{x}=1$ より,

$$\begin{aligned} &(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)\times\left(\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\right)=1 \\ &\frac{a_0}{1!}+\left(\frac{a_0}{2!}+\frac{a_1}{1!}\right)x+\left(\frac{a_0}{3!}+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_2}{1!}\right)x^2+\left(\frac{a_0}{4!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{1!}\right)x^3+\cdots=1. \end{aligned}$$

左辺と右辺を比べて,

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{1!}=1, \\ &\frac{a_0}{2!}+\frac{a_1}{1!}=0, \\ &\frac{a_0}{3!}+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_2}{1!}=0, \\ &\frac{a_0}{4!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{1!}=0, \\ &\cdots, \\ &\frac{a_0}{(n+1)!}+\frac{a_1}{n!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2!}+\frac{a_n}{1!}=0 \quad (n\geq 1). \end{aligned}$$

ここで, ベルヌーイ数の定義から $a_k = \dfrac{B_k}{k!}$ (ただし $0! = 1$ とする) であるから,

$$\begin{aligned} &B_0 = a_0 \times 0! = 1 \\ &\frac{B_0}{0! \times (n+1)!} + \frac{B_1}{1! \times n!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{(n-1)! \times 2!} + \frac{B_n}{n! \times 1!} = 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_n &= -n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!\,(n+1-k)!} \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} B_k \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n+1}C_k B_k \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

また, ベルヌーイ数に関して次の関係式が成り立つ.

$s \geq 0$ の整数のとき,

$$\zeta(2s) = (-1)^{s+1} \frac{B_{2s}(2\pi)^{2s}}{2 \times (2s)!}$$

$s \geq 1$ の整数のとき,

$$\zeta(-s) = -\frac{B_{s+1}}{s+1}$$

と表せる.

3 オイラー積によるゼータ関数の表示

証明

p_n は素数だから, $p_n > 1$ である. また, $s > 1$ のとき, $p_n^{-s} < 1$ であるから,

$$1 + p_n^{-s} + p_n^{-2s} + p_n^{-3s} + p_n^{-4s} + \cdots = \frac{1}{1 - p_n^{-s}}.$$

ここで, $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} (1 + p_n^{-s} + p_n^{-2s} + p_n^{-3s} + p_n^{-4s} + \cdots)$ において, 最初の 2 項だけ計算すると,

$$(1 + p_1^{-s} + p_1^{-2s} + p_1^{-3s} + p_1^{-4s} + \cdots)(1 + p_2^{-s} + p_2^{-2s} + p_2^{-3s} + p_2^{-4s} + \cdots)$$

$$=(1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + 2^{-3s} + 2^{-4s} + \cdots)(1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + 3^{-3s} + 3^{-4s} + \cdots)$$

$$=1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + 8^{-s} + 9^{-s} + 12^{-s} + 16^{-s} + 18^{-s} + \cdots$$

であり, 3 番目の項も計算すると, 5 の倍数の項も現れる. N 番目の項まで含めると, $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_N$ の倍数の全ての項が現れることになる. しかも, 素因数分解の一意性より, これらの数は重複なくちょうど一回ずつ現れる. すなわち,

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-s}} = \sum_{m} m^{-s}$$

で, この右辺の和は素因数に $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots p_N$ しか現れない自然数全てにわたる. 特に, p_N 以下の自然数は全て右辺に現れる. よって,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-s}} \right| \leq \sum_{m>p_N} m^{-s} \quad (p_N\text{より大きい自然数の和})$$

となり, この右辺は $s>1$ なので $N \to \infty$ とすると 0 になる. したがって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-s}}$$

が証明された.

4 ガンマ関数によるゼータ関数の表示

証明

$x>0$ のとき, $e^{-x}<1$ であるから,

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}
\frac{x^{s-1}}{e^x-1} &= \frac{e^{-x}x^{s-1}}{1-e^{-x}} \\
&= e^{-x}x^{s-1}(1+e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots) \\
&= e^{-x}x^{s-1}+e^{-2}x^{s-1}+e^{-3}x^{s-1}+e^{-4}x^{s-1}+\cdots
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx &= \int_0^\infty (e^{-x}x^{s-1}+e^{-2}x^{s-1}+e^{-3}x^{s-1}+e^{-4}x^{s-1}+\cdots)dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx + \int_0^\infty e^{-2x}x^{s-1}dx \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-3x}x^{s-1}dx + \int_0^\infty e^{-4x}x^{s-1}dx + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-kx}x^{s-1}dx
\end{aligned}$$

ここで, $y=kx$ とおくと, $x:0\to\infty$ のとき $y:0\to\infty$ であり,
$x=\dfrac{y}{k}$ より, $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{k}$. よって,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-kx}x^{s-1}dx &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-y}\left(\frac{y}{k}\right)^{s-1}\frac{1}{k}dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\int_0^{\infty} e^{-y}y^{s-1}dy \\
&= \zeta(s)\Gamma(s)
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx
$$

5　$\zeta(s)$ は $s>1$ において正則であること

$$
\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}
$$

は $s>1$ なる実数 s において正則である.

証明

任意の $x>1$ なる実数 x に対して $k \leq x < k+1$ を満たす自然数 k が存在する. 各辺を $s(>1)$ 乗して逆数をとると,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(k+1)^s} &< \frac{1}{x^s} \\
\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^s}dx &< \int_k^{k+1}\frac{1}{x^s}dx \\
\frac{1}{(k+1)^s} &< \int_k^{k+1}\frac{1}{x^s}dx
\end{aligned}
$$

ここで, 各辺に $k=1,2,\cdots,n-1$ を代入して和をとると,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^s} &< \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^s}dx \\
\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s} &< \int_1^{n}\frac{1}{x^s}dx \\
\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s} &< \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^n \\
\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s} &< \frac{1}{1-s}\left(n^{1-s}-1\right)
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s} < 1+\frac{1}{1-s}\left(n^{1-s}-1\right)
$$

ここで, 右辺において $n\to\infty$ とすると, $\lim_{n\to\infty} n^{1-s}=0$ より,

$$
\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{1-s}(n^{1-s}-1)\right\} = 1-\frac{1}{1-s}.
$$

よって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} < 1 - \frac{1}{1-s}$.
左辺は正項級数であり, 右辺は正の定数 $1+\dfrac{1}{s-1}$ であるから, 左辺の正項級数は収束する. すなわち, $s>1$ において,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

は収束する.

また $s \leq 1$ については発散する. $s=1$ のとき, $\zeta(1)$ は調和級数になり発散する. $s<1$ のとき,

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s} \geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}\right)=\infty$ となる. よって, $s<1$ で $\zeta(s)$ は発散する.

なお, $\mathrm{Re}(s)>1$ の複素数の範囲で $\zeta(s)$ の値は収束するらしい.

6 $1+2+3+\cdots=-\dfrac{1}{12}$ が成り立つ公理

$\varphi(s) = 1-\dfrac{1}{2^s}+\dfrac{1}{3^s}-\dfrac{1}{4^s}+\cdots$ と定義すると,

$$\begin{aligned}
\varphi(s) &= \left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots\right)-2\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\cdots\right)\\
&= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}-2\times\frac{1}{2^s}\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots\right)\\
&= \zeta(s)-2^{1-s}\zeta(s)\\
&\therefore \varphi(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s)
\end{aligned}$$

よって, $\varphi(-1) = -3\zeta(-1)$ である.
ここで, $f(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots$ と定義すると, $|x|<1$ の範囲で, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ となるが, この式が $x=-1$ でも成り立っていると定義する.
また, $g(x) = x\dfrac{df(x)}{dx}$ と定義すると,

$$g(x) = x+2x^2+3x^3+\cdots = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1 \leq x < 1)$$

となる.
$g(-1) = -1+2-3+4-\cdots = -\varphi(-1)$ であり, $g(-1) = -\dfrac{1}{4}$ であるから, $\varphi(-1) = -g(-1) = \dfrac{1}{4}$ である.
よって, $\zeta(-1) = -\dfrac{1}{3}\varphi(-1) = -\dfrac{1}{12}$ が成り立つ.

7 参考文献

[1] 小林　昭七:なっとくするオイラーとフェルマー, 2003 年, 講談社
[2] 松本　耕二:リーマンのゼータ関数, 2013 年, 朝倉書店
[3]「オイラーの公式の謎:大学教員のつぶやき」, <http://sakuraimac.exblog.jp/19944849>, (2014/09/10)
[4]「コロキウム室(オイラーの「無限解析入門(1)」·その1)」, <http://www.junko-k.com/cthema/19kaise1.htm>, (2014/09/10)
[5]「リーマンゼータ関数 - Wikipedia」, http://ja.wikipedia.org/wiki/リーマンゼータ関数, (2014/09/12)