ゲーデルの第一不完全性定理を読む

芝浦工業大学　数理科学研究会

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

制作: 数理科学科２年 谷野徹

目 次

1　研究背景

「不完全性定理」,「理性の限界」,「証明不可能なことの証明」などの言葉の響きだけで安易にこの定理に興味を持った. 今回は第一不完全性定理をゲーデルが初めて公表した論文『プリンキピア・マテマティカやその関連体系での形式的に決定不可能な命題について,I』の定理 VI（第一不完全性定理) の証明を目標に設定して, この論文を自分なりに消化し, まとめていく.

2　第一不完全性定理とその証明の概要

2.1　第一不完全性定理とは

今日ゲーデルの第一不完全性定理と呼ばれている定理は以下のような主張である.
「算術を含む形式体系が ω-無矛盾であれば証明も反証もできない命題が存在する.」

形式体系は記号, 論理式, 公理, 推論規則, 証明が定義された数学理論を記述するための枠組みである. 数学理論の正しい命題は形式体系で機械的に導出される. 公理をスタートとし推論規則に従って論理式を変形していくことで新たな論理式が得られる. そうして得られた論理式を定理と呼び, 定理に至る論理式の列を証明と呼ぶ.

2.2　証明の概略

上で述べた形式体系は複数の種類がある. ゲーデルの論文ではホワイトヘッドとラッセル共著『プリンキピア・マテマティカ』の体系 PM を簡単にしたものが使われている.PM は数学で行われているあらゆる証明を形式的に記述できる. この PM およびその関連体系において真であることも偽であることも証明できない決定不能命題が存在することを示す.

定義 2.1 (クラス符号)

- PM の論理式
- 1 つだけ自然数の自由変数をもつ

この 2 つを満たすものをクラス符号と呼ぶ.

定義 2.2
$R(n)$: クラス符号を並び上げたときの n 番目.

定義 2.3
α を任意のクラス符号とする.
$[\alpha; n]$: α の自由変数を自然数 n を表す PM の記号で置き換えたもの.

今定義した 3 つの概念は PM で定義できることが後でわかる.

定義 2.4
自然数の集合 K を次で定義する.

$$n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n); n] \tag{1}$$

$Bew\ x$: x が証明可能な論理式である.
(1) の意味 : n 番目のクラス符号の変数に n を表す記号を代入したものは証明できない.

この定義に現れる概念はすべて PM で定義できるから K も PM で定義できる.

(1) も n に関する 1 変数の論理式だからクラス符号 S と見れる. このとき,

$$\exists q \ s.t. \ S = R(q)$$

$[R(q);q]$ の意味は q が K に属する, つまり $[R(q);q]$ は $\overline{Bew}[R(q);q]$ であり自分は証明できないということを表す.

いまから $[R(q);q]$ が PM で決定不能であるということを示す.
$[R(q);q]$ が証明できたとすると $[R(q);q]$ は真.$[R(q);q]$ が真ならば定義より $\overline{Bew}[R(q);q]$ も真. これは矛盾.
$\overline{[R(q);q]}$ が証明できたとするとこれは $Bew[R(q);q]$ と同値なので $[R(q);q]$ が証明できることになる. いま,$[R(q);q]$ とその否定が両方証明できることになり体系が矛盾する. 逆に体系が矛盾していなければ.$\overline{[R(q);q]}$ は証明できない.
以上から $[R(q);q]$ と $\overline{[R(q);q]}$ どちらも証明できないので $[R(q);q]$ は決定不能文.

余談 1
この議論はうそつきのパラドックスに密接に関わっている.

うそつきのパラドックス

「クレタ人は皆嘘吐きだ.」とクレタ人の預言者が言った.
上の文は決定不能である.
この預言者がうそつきだとすると, 彼は本当のことを言っていることになり矛盾.
逆にこの預言者本当のことを言っているとすると, クレタ人である彼もうそつきになり矛盾.

うそつきのパラドックスの文は「私は嘘を言っている.」という文に単純化できる.(1) が主張する「この文は証明できない.」も同様に決定できない.

3　第一不完全性定理の証明

3.1　体系 P の定義

まずは証明に使う体系 P を定義していく.

定義 3.1 (体系 P の基本記号)
P で使う記号を次のように定義する.
I. 定数

意味	でない	または	すべての	ゼロ	後者関数	左括弧	右括弧
記号	$\neg$	$\vee$	$\forall$	0	f	(	)

II. 変数
第 1 型：0 を含む自然数のための変数 $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$
第 2 型：第 1 型の変数の集合のための変数 $(x_2, y_2, z_2, \ldots)$
第 3 型：第 2 型の変数の集合のための変数 $(x_3, y_3, z_3, \ldots)$
それ以上の型の変数についても同様に定義する.

定義 3.2 (符号)
型 1 の符号とは以下のような記号である.

$$a, fa, ffa, fffa, \ldots \quad (a \text{ は } 0 \text{ か型 } 1 \text{ の変数})$$

とくに a が 0 のとき数項と呼ぶ. 型 n の符号とは, 型 n の変数である.

定義 3.3 (基本論理式)
b が n 型の記号で, a が $n+1$ 型の記号であるとき, $a(b)$ を基本論理式とよぶ.

定義 3.4 (論理式)

1. 基本論理式は論理式.
2. a, b が論理式なら $\neg(a), (a) \vee (b), \forall x(a)$ は論理式.
3. 以上のみが論理式である.
4. 自由変数を持たない論理式を文とよぶ.
5. ちょうど n 個の自由変数をもつ論理式を n 項関数符号という. 特に $n = 1$ のときクラス符号とよぶ.

定義 3.5 (置換)
a が論理式, v が変数, b が v と同じ型の記号のとき

$$\mathrm{Subst}\ a\begin{pmatrix} v \\ b \end{pmatrix}$$

は a のうち v をすべて b に置き換えることで得られる論理式.
この $Subst$ は P で定義できることが後でわかる.

定義 3.6 (省略形)
簡単のため省略形を定義する.

1. $(a) \to (b) := (\neg(a) \vee (b))$

2. $\exists x(a) := \neg(\forall x(\neg(a)))$

3. $(a) \wedge (b) := \neg((\neg(a)) \vee (\neg(b)))$

これから P の公理を定める.

公理 3.1 (ペアノの公理)

1. $\neg(fx_1 = 0)$

2. $fx_1 = fy_1 \to x_1 = y_1$

3. $x_2(0) \wedge \forall x_1(x_2(x_1) \to x_2(fx_1)) \to \forall x_1(x_2(x_1))$

公理 3.2 (命題論理の公理)

1. $p \vee p \to p$

2. $p \to p \vee q$

3. $p \vee q \to q \vee p$

4. $(p \to q) \to (r \vee p \to r \vee q)$

ただし,p,q,r は任意の論理式.

公理 3.3 (述語論理の公理)

1. $\forall v(a) \to \mathrm{Subst}\ a\begin{pmatrix} v \\ c \end{pmatrix}$

2. $\forall v(b \vee a) \to b \vee \forall v(a)$

ただし,
a : 任意の論理式
v : 任意の変数
b : v が自由に出現しない論理式
c : v と同じ型の記号

公理 3.4 (内包公理)
$\exists u \forall v(u(v) \equiv a)$
ただし,
u : n 型の変数
v : $n+1$ 型の変数
a : u が自由に出現しない論理式
条件 a で集合 u を定められるという意味.

公理 3.5 (外延公理)
$\forall x_1(x_2(x_1) \equiv y_2(x_1)) \to x_2 = y_2$
どんな x_1に対しても x_1が x_2に属するかどうかと x_1が y_2に属するかがいつも一致するとき x_2と y_2を等しいと考えるという意味.

次に P の推論規則を定義する.

定義 3.7 (推論規則)

1. $b \to c$ と b から c が得られる.(三段論法)

2. a から $\forall v(a)$ が得られる.(全称化)

ただし,a, b, c は任意の論理式.

定義 3.8 (証明可能な論理式)

1. 公理は証明可能な論理式.

2. A と $A \to B$ の両方が証明可能な論理式ならば B は証明可能な論理式.

3. A が証明可能な論理式ならば任意の変数 x に対し $\forall x A$ は証明可能な論理式.

4. 以上のみが証明可能な論理式である.

余談 2

いま, 体系 P を定義したが不完全性定理の証明では公理と推論規則に基づいた形式体系の中での証明を見ることができない. 冒頭で"機械的"といった形式的証明の簡単な例を見てみよう.

定理 3.1

$A \to A$

証明

公理 3.2 の 1 で $p = A$ とすると

$$A \vee A \to A \qquad (*)$$

公理 3.2 の 4 で $p = A \vee A, q = A, r = \neg A$ とすると,

$$((A \vee A) \to A) \to ((\neg A \vee (A \vee A)) \to (\neg A \vee A)) \qquad (**)$$

$(*), (**)$ と推論規則 1 から

$$(\neg A \vee (A \vee A)) \to (\neg A \vee A) \qquad (***)$$

が推論できる. $(***)$ に省略形 $1(\neg A \vee (A \vee A)) \equiv A \to (A \vee A)$ を適応すれば次を得る.

$$(A \to (A \vee A)) \to (\neg A \vee A) \qquad (***)'$$

公理 3.2 の 2 で $p = A, q = A$ とすれば,

$$A \to (A \vee A) \qquad (****)$$

$(***)', (****)$ と推論規則 1 から $\neg A \vee A$ が推論される.
省略形 1 で $(\neg A \vee A) \equiv A \to A$ である. ∎

3.2 ゲーデル数によるコーディング

形式体系 P は「x は偶数である.」「x は y と等しい.」といった自然数の命題が扱える. しかし前節の概略で見た「この文は証明できない.」は自然数論の命題でない. この命題を考えるには「x は P の公理から導ける.」,[x は証明配列である.],「x は証明できる.」というようなメタ数学的概念の命題が P で扱えなければならない. そこでゲーデル数と呼ばれる手法でメタ数学的概念の命題を自然数の命題に変換する.
形式体系では論理式は記号の有限列であり, 証明は論理式の有限列, つまり記号の有限列の有限列である. この方法で記号に自然数を割り当てることで論理式と証明は自然数の有限列になる. そうすると先の [x は証明配列である.],「x は証明できる.」のようなメタ数学的問いが, 自然数の有限列がある性質を満たすかという算術的問いになる. 算術的問いは P で扱えるから, 算術的問いとなったメタ数学的問いが P で扱えるようになる. つまり「論理式」,「証明」,「証明可能な論理式」という概念が P のなかで扱える.
その方法が以下である.

定義 3.9 (基本記号のゲーデル数)
概略であった記号に自然数を一対一対応させる方法が以下である.
まずは基本記号に 13 までの奇数を割り振る.

記号	0	f	$\neg$	$\vee$	$\forall$	(	)
ゲーデル数	1	3	5	7	9	11	13

定義 3.10 (変数のゲーデル数)
第 n 型の変数に 17 以上の素数の n 乗を対応させる.

定義 3.11 (列のゲーデル数)
上の二つの定義より体系 P の基本記号と変数に自然数を一対一対応させた.
今度はゲーデル数の列 $n_1, n_2, \ldots, n_k$に $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{n_k}$ を対応させる.
ただし,p_k は小さいほうから k 番目の素数.
こうして任意の記号の有限列に自然数を一対一対応できた.

例 3.1
実際に P の記号のゲーデル数を例示する.
P で"2"を表す数項"$ff0$"のゲーデル数を考える.
"f"のゲーデル数は 3,"0"のゲーデル数は 1 なので"$ff0$"のゲーデル数は $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 1080$ である.

3.3 再帰的関数

ゲーデル数を用いることで記号列の性質を自然数の性質として記述できるようになった. つまりメタ数学的概念が「ゲーデル数がある性質を満たす」という算術的概念で表せるようになった. 今からやることは具体的なメタ数学的概念のゲーデル数が持つべき性質を関数の形で記述する. まずは記述に使う再帰的関数の定義とその性質を示していく.

定義 3.12 (再帰的定義)
関数 $\phi(x)$ が関数 $\psi(x)$ と$\mu(x)$ から再帰的に定義されるとは, 任意の x に対し, 以下が成り立つこととする.

$$\begin{aligned} \phi(0,x) &= \psi(x) \\ \phi(k+1,x) &= \mu(k,\phi(k,x),x) \end{aligned} \tag{2}$$

定義 3.13 (再帰的関数)
1. 定数関数は再帰的関数
2. 後続関数を得る関数は再帰的関数
3. 二つの再帰的関数から再帰的に定義される関数は再帰的関数
4. 再帰的関数の変数に再帰的関数を代入して得られる関数は再帰的関数

ϕ_i の列のうち, 最短の列の長さをその再帰的関数の次数とよぶ.

定義 3.14 (再帰的関係)
自然数間の関係 $R(x)$ が再帰的関係であるとは,

$$\forall x\,[R(x) \Leftrightarrow \phi(x) = 0]$$

が成り立つような再帰的関数 $\phi(x)$ が存在することをいう.

例 3.2 (再帰的定義の例)
I. 足し算

$$\begin{cases} 0 + x = x \\ (k+1) + x = (k+x) + 1 \end{cases}$$

II. 掛け算

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ (k+1) \cdot x = (k \cdot x) + x \end{cases}$$

III. 累乗

$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{k+1} = x^k \cdot x \end{cases}$$

定理 3.2
R, S が再帰的関係ならば,$\overline{R}, R \vee S, R \wedge S$ も再帰的関係である.
つまり, 再帰的関係が論理演算で閉じていることを主張する.

証明
R と S がそれぞれ再帰的関数 ϕ, ψ で表されているとする.(このとき,R が成り立つとき $\phi = 0$, 成り立たないとき $\phi = 1$.)
まず否定を表す関数 α を再帰的に定義する.$\alpha(x)$ は x が 0 ならば 1, それ以外ならば 1 と定義する.

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= 1 \\ \alpha(x) &= 0 \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

α と ϕ の合成により $\overline{R}$ が得られてこれは再帰的.

次に選言を表す関数 β を再帰的に定義する.

$\beta(x,y)$ は x,y の少なくとも一方が 0 のとき 0 を値にとり,x,y がどちらも 0 でないとき 1 を値にとるように定義すればよい.

$$\begin{aligned} \beta(0,x)=\beta(x,0) &= 0 \\ \beta(x,y) &= 1 \quad (x,y \neq 0) \end{aligned}$$

βとϕ,ψ を合成すれば $R \vee S$ が得られてこれは再帰的.

最後に $R \wedge S$ が再帰的であることを示す. ド・モルガンの法則により,

$$R \wedge S = \overline{\overline{R} \vee \overline{S}}$$

と表せてこれは R,S,α,β の合成で表せるので再帰的. ∎

定理 3.3
関数 F,G が再帰的ならば, 関係 $F=G$ も再帰的である.
つまり, 再帰的関数の同値関係は再帰的であることを主張する.

証明
$g(x)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g(x+1) &= x \end{aligned}$$

これは x の前の数を表す関数.
次に引き算を再帰的に定義する.(P では自然数のみを扱っているので負になるときは 0 とする)

$$\begin{aligned} x-0 &= x \\ x-(k+1) &= g(x-k) \end{aligned}$$

次に同値を表す関数 γ を再帰的に定義する. $\gamma(x,y)$ は x と y が一致するとき 0, そうでないとき 1 を値にとるように定義すれば良い.

$$\gamma(x,y) = (x-y)+(y-x)$$

γとϕ,ψを合成すれば $R=S$ が得られてこれは再帰的 ∎

定理 3.4
関数 $\phi(x)$ と関係 $R(x,y)$ が再帰的ならば, 次の関係 S,T と関数 ψ も再帰的である.

$$\begin{aligned} S(x,y) &\Leftrightarrow \exists x[x \leq \phi(x) \wedge R(x,y)] \\ T(x,y) &\Leftrightarrow \forall x[x \leq \phi(x) \rightarrow R(x,y)] \\ \psi(x,y) &= \min x[x \leq \phi(x) \wedge R(x,y)] \end{aligned}$$

つまり, 再帰的関係が有界量化記号で閉じていることと最小数を有界領域で探す関数が再帰的であることを主張する.

証明
R が再帰的関数 ρ で表されているとする.
次に関数 χ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \chi(0,y) &= 0 \\ \chi(n+1,y) &= (n+1)\cdot a + \chi(n,y)\cdot\alpha(a) \qquad (3) \end{aligned}$$

ただし $a = \alpha[\alpha(\rho(0,y))] \cdot \alpha[\rho(n+1,y)] \cdot \alpha[\chi(n,y)], \alpha$ は定理 3.2 の証明と同じもの.
α は 0 か 1 しか値をとらないので a もそうである.
$a = 1$ のとき $\chi(n+1, y = n+1)$
$a = 0$ のとき $\chi(n+1,y) = \chi(n,y)$
前者は $\overline{R}(0,y)$ かつ $R(n+1,y)$ かつ$\chi(n,y) = 0$ となるときのみ生じる.
つまり $\chi(n,y)$ は $R(n,y)$ が成り立つ最小の n まで 0 を値にし,R が成り立つときははじめて n を値にとる.
従って

$$\begin{aligned}\psi(x,y) &= \chi(\phi(x),y) \\ S(x,y) &\Leftrightarrow R(\psi(x,y),y)\end{aligned}$$

と再帰的定義できる.
同様の議論を $\overline{R}$ に対して行えば T も再帰的定義できる. ∎

3.4 メタ数学的概念の再帰的関数による表現

まず, 新たな記号 ι, ε を定義しておく.

定義 3.15 (ι記号)
$\exists! x F(x) \equiv \exists x F(x) \wedge \forall x \forall y [F(x) \wedge F(y) \to x = y]$
$F(x)$ を成り立たせる x がただ一つ存在する.
この $\exists! x F(x)$ が証明できるとき, そのような x を$\iota x F(x)$ と表す.

定義 3.16 (ε記号)
$\varepsilon x F(x) \equiv \iota y\{[\forall x(F(x) \to y \leq x) \wedge F(y)] \vee [\neg \exists x F(x) \wedge y = 0]\}$
条件 $F(x)$ を満たす自然数 x が存在すれば, そのような自然数の最小のもの.

今定義した ι, ε は再帰的である. また次で定義する関数 (関係)1 $\sim$ 45 もすべて再帰的である.
これらは定理 3.2 $\sim$ 3.4, 例 3.2 から容易にわかる.

再帰的関数 1
$x/y \equiv \exists z[z \leq x \wedge x = y \cdot z]$
x は y で割り切れる.

再帰的関数 2
$\mathrm{Prim}(x) \equiv \overline{\exists z}[z \leq x \wedge z \neq 1 \wedge z \neq x \wedge x/z] \wedge x > 1$
x は素数である.

再帰的関数 3
$0 \ \mathrm{Pr} \ x \equiv 0$
$(n+1) \ \mathrm{Pr} \ x \equiv \varepsilon y[y \leq x \wedge \mathrm{Prim}(y) \wedge x/y \wedge y > n \ \mathrm{Pr} \ x]$
x の約数で n 番目に大きい素数.

再帰的関数 4
$0! \equiv 1$
$(n+1) \equiv (n+1) \cdot n!$
階乗.

再帰的関数 5

$\mathrm{Pr}(0) \equiv 0$

$\mathrm{Pr}(n+1) \equiv \varepsilon y[y \leq \{\mathrm{Pr}(n)\}! + 1 \wedge \mathrm{Prim}(y) \wedge y > n \text{ Pr } x]$

大きさの順で n 番目の素数.

再帰的関数 6

$n \text{ Gl } x \equiv \varepsilon y[y \leq x \wedge x/(n \text{ Pr } x)^y \wedge \overline{x/(n \text{ Pr } x)^{y+1}}]$

数 x に対応付けられる数列の n 番目の数.

再帰的関数 7

$\mathrm{l}(x) \equiv \varepsilon y[y \leq x \wedge y \text{ Pr } x > 0 \wedge (y+1) \text{ Pr } x = 0]$

数 x に対応付けられる数列の長さ.

再帰的関数 8

$x * y \equiv \varepsilon z\{z \leq [\mathrm{Pr}(\mathrm{l}(x) + \mathrm{l}(y))]^{x+y} \wedge \forall n[n \leq \mathrm{l}(x) \rightarrow n \text{ Gl } z = n \text{ Gl } x] \wedge$
$\quad \forall n[0 < n \leq \mathrm{l}(y) \rightarrow (n + \mathrm{l}(x)) \text{ Gl } z = n \text{ Gl } y]\}$

2 つの有限列 x と y を連結する演算.

再帰的関数 9

$\mathrm{R}(x) \equiv 2^x$

x だけからなる数列.

再帰的関数 10

$\mathrm{E}(x) \equiv \mathrm{R}(11) * x * \mathrm{R}(13)$

括弧で閉じる演算.(注.11, 13 はそれぞれ"(", ")"に対応するゲーデル数だった.)

再帰的関数 11

$n \text{ Var } x \equiv \exists z[13 < z < x \wedge \mathrm{Prim}(z) \wedge x = z^n \wedge n \neq 0]$

x は型 n の変数.(注.13 より大きい素数は変数に対応するゲーデル数だった.)

再帰的関数 12

$\mathrm{Var}(x) \equiv \exists n[n \leq x \wedge n \text{ Var } x]$

x は変数.

再帰的関数 13

$\mathrm{Neg}(x) \equiv \mathrm{R}(5) * \mathrm{E}(x)$

x の否定.(注.5 は"$\neg$"と対応付けられるゲーデル数.$\mathrm{Neg}(x)$ は$\neg x$ を表す.)

再帰的関数 14

$x \text{ Dis } y \equiv \mathrm{E}(x) * \mathrm{R}(7) * \mathrm{E}(y)$

x と y の選言.(注.7 は" $\vee$ "に対応するゲーデル数.x Dis y は $x \vee y$ を表す.)

再帰的関数 15

$x \text{ Gen } y \equiv \mathrm{R}(9) * \mathrm{R(x)} * \mathrm{R(y)}$

変数 x に関する y の全称化.(注.9 は"$\forall$"に対応するゲーデル数.x Gen y は $\forall x[y]$ を表す.)

再帰的関数 16

$0 \text{ N } x \equiv x$

$(n+1) \text{ N } x \equiv \mathrm{R}(3) * n \text{ N } x$

x の前に n 個の f をつける演算.(注.3 は後続関数"f"に対応するゲーデル数.)

再帰的関数 17
$\mathrm{Z}(n) \equiv n \ \mathrm{N}\ [\mathrm{R}(1)]$
数 n を表す数項.(注.1 は"0"に対応するゲーデル数.)

再帰的関数 18
$\mathrm{Type}_1(x) \equiv \exists m, n\{m, n \leq x \wedge [m = 1 \vee 1 \ \mathrm{Var}\ m] \wedge x = n \ \mathrm{N}\ [\mathrm{R(m)}]\}$
x は型 1 の記号.

再帰的関数 19
$\mathrm{Type}_n(x) \equiv [n = 1 \wedge \mathrm{Type}_1(x)] \vee [n > 1 \wedge \exists v\{v \leq x \wedge n \ \mathrm{Var}\ v \wedge x = \mathrm{R}(v)\}]$
x は型 n の記号.

再帰的関数 20
$\mathrm{Elf}(x) \equiv \exists y, z, n[y, z, n \leq x \wedge \mathrm{Type}_n(y) \wedge \mathrm{Type}_{n+1}(z) \wedge x = z * \mathrm{E}(y)]$
x は基本論理式.

再帰的関数 21
$\mathrm{Op}(x, y, z) \equiv x = \mathrm{Neg}(y) \vee x = y \ \mathrm{Dis}\ z \vee \exists v[v \leq x \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge x = v \ \mathrm{Gen}\ y]$
1 回の論理演算で得られる式.

再帰的関数 22
$\mathrm{FR}(x) \equiv \forall n\{0 < n < \mathrm{l}(x) \rightarrow \mathrm{Elf}(n \ \mathrm{Gl}\ x) \vee \exists p, q[0 < p, q < n \wedge \mathrm{Op}(n \ \mathrm{Gl}\ x, p \ \mathrm{Gl}\ x, q \ \mathrm{Gl}\ x)]\} \wedge \mathrm{l}(x) > 0$
x は論理式列.その各要素は基本論理式か前の論理式から論理演算 否定,選言,全称化で得られる.

再帰的関数 23
$\mathrm{Form}(x) \equiv \exists n\{n \leq (\mathrm{Pr}([\mathrm{l}(x)]^2))^{x \cdot [\mathrm{l}(x)]^2} \wedge \mathrm{FR}(n) \wedge x = [\mathrm{l}(n)] \ \mathrm{Gl}\ n\}$
x は論理式.

再帰的関数 24
$v \ \mathrm{Geb}\ n, x \equiv \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Form}(x) \wedge$
$$\exists a, b, c[a, b, c \leq x \wedge x = a * (v \ \mathrm{Gen}\ b) * c \wedge \mathrm{Form}(b) \wedge \mathrm{l}(a) + 1 \leq n \leq \mathrm{l}(a) + \mathrm{l}(v \ \mathrm{Gen}\ b)]$$
変数 v は x の n 文字目で束縛されている.

再帰的関数 25
$v \ \mathrm{Fr}\ n, x \equiv \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Form}(x) \wedge v = n \ \mathrm{Gl}\ x \wedge n \leq \mathrm{l}(x) \wedge \overline{v \ \mathrm{Geb}\ n, x}$
変数 v は x の n 文字目で自由である.

再帰的関数 26
$v \ \mathrm{Fr}\ x \equiv \exists n[n \leq \mathrm{l}(x) \wedge v \ \mathrm{Fr}\ n, x]$
変数 v は x に自由変数として出現する.

再帰的関数 27
$\mathrm{Su}\, x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \varepsilon z\{z \leq [\mathrm{Pr}(\mathrm{l}(x)+\mathrm{l}(y))]^{x+y} \wedge \exists u, v[u, v \leq x \wedge x = u * \mathrm{R}(n \ \mathrm{Gl}\ x) * v \wedge z = u * y * v \wedge n = \mathrm{l}(u)+1]\}$
x の n 文字目に y を代入したもの.

再帰的関数 28
$0 \ \mathrm{St}\ v, x \equiv \varepsilon n\{n \leq \mathrm{l}(x) \wedge v \ \mathrm{Fr}\ n, x \wedge \overline{\exists p}[n < p \leq \mathrm{l}(x) \wedge v \ \mathrm{Fr}\ p, x]\}$
$(k + 1) \ \mathrm{St}\ v, x \equiv \varepsilon n\{n < k \ \mathrm{St}\ v, x \wedge v \ \mathrm{Fr}\ n, x \wedge \overline{\exists p}[n < p < k \ \mathrm{St}\ v, x \wedge v \ \mathrm{Fr}\ p, x]\}$
x において v が $k + 1$ 回目に自由に出現する位置.

再帰的関数 29

$\mathrm{A}(v,x) \equiv \varepsilon n[n \leq \mathrm{l}(x) \wedge n \ \mathrm{St}\ v, x = 0]$

x において v が自由に出現する回数.

再帰的関数 30

$\mathrm{Sb}_0\Big(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array}\Big) \equiv x$

$\mathrm{Sb}_{k+1}\Big(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array}\Big) \equiv \mathrm{Su}\ [\mathrm{Sb}_k\Big(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array}\Big)]\Big(\begin{array}{c} k\ \mathrm{St}\ v, x \\ y \end{array}\Big)$

論理式 x において自由に出現する変数 v を右から k 個の出現まで y に置き換えたもの.

再帰的関数 31

$\mathrm{Sb}\Big(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array}\Big) \equiv \mathrm{Sb}_{\mathrm{A}(v,x)}\Big(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array}\Big)$

定義 3.5 の Subst である.

再帰的関数 32

$x \ \mathrm{Imp}\ y \equiv [\mathrm{Neg}(x)]\ \mathrm{Dis}\ y$

$x \ \mathrm{Con}\ y \equiv \mathrm{Neg}\{[\mathrm{Neg}(x)]\ \mathrm{Dis}\ [\mathrm{Neg}(y)]\}$

$x \ \mathrm{Aeq}\ y \equiv (x\ \mathrm{Imp}\ y)\ \mathrm{Con}\ (y\ \mathrm{Imp}\ x)$

$v \ \mathrm{Ex}\ y \equiv \mathrm{Neg}\{v\ \mathrm{Gen}\ [\mathrm{Neg}(y)]\}$

上から,

$\neg x \vee y$ つまり x ならば y を表す.

$\neg(\neg x \vee \neg y)$ つまり x かつ y を表す.

$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$ つまり x と y が同値であることを表す.

$\neg \forall v[\neg a]$ つまりある x について y であることを表す.

再帰的関数 33

$n\ \mathrm{Th}\ x \equiv \varepsilon y\{y \leq x^{x^n} \wedge \forall k[k \leq \mathrm{l}(x) \rightarrow$
$(k\ \mathrm{Gl}\ x \leq 13 \wedge k\ \mathrm{Gl}\ y = k\ \mathrm{Gl}\ x) \vee (k\ \mathrm{Gl}\ x > 13 \wedge k\ \mathrm{Gl}\ y = k\ \mathrm{Gl}\ x \cdot [1\ \mathrm{Pr}(k\ \mathrm{Gl}\ x)]^n)]\}$

x の n 次型上げ.

再帰的関数 34

$\mathrm{Z\text{-}Ax}(x) \equiv (x = z_1 \vee x = z_2 \vee x = z_3)$

ただし, z_1, z_2, z_3はペアノの公理 (公理 3.1)1, 2, 3 のゲーデル数.

x は公理 3.1 から得られる論理式.

再帰的関数 35

$\mathrm{A}_1\text{-}\mathrm{Ax}(x) \equiv \exists y[y \leq x \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge x = (y\ \mathrm{Dis}\ y)\ \mathrm{Imp}\ y]$

x は公理 3.2 の 1 から得られる論理式.

同様に公理 3.2 の 2 ∼ 4 に対し, A_2-Ax, A_3-Ax, A_4-Ax を次で定義する.

$\mathrm{A}_2\text{-}\mathrm{Ax}(x) \equiv \exists y, z[y, z \leq x \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge \mathrm{Form}(z) \wedge x = y\ \mathrm{Imp}\ (y\ \mathrm{Dis}\ z)]$

$\mathrm{A}_3\text{-}\mathrm{Ax}(x) \equiv \exists y, z[y, z \leq x \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge \mathrm{Form}(z) \wedge x = (y\ \mathrm{Dis}\ z)\ \mathrm{Imp}\ (y\ \mathrm{Dis}\ z)]$

$\mathrm{A}_4\text{-}\mathrm{Ax}(x) \equiv \exists y, z, w[y, z, w \leq x \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge \mathrm{Form}(z) \wedge \mathrm{Form}(w) \wedge x = (y\ \mathrm{Imp}\ z)\ \mathrm{Imp}\ ((w\ \mathrm{Dis}\ z)\ \mathrm{Imp}\ (w\ \mathrm{Dis}\ y))]$

再帰的関数 36

$\mathrm{A\text{-}Ax}(x) \equiv \mathrm{A}_1\text{-}\mathrm{Ax}(x) \vee \mathrm{A}_2\text{-}\mathrm{Ax}(x) \vee \mathrm{A}_3\text{-}\mathrm{Ax}(x) \vee \mathrm{A}_4\text{-}\mathrm{Ax}(x)$

x は公理 3.2 から得られる論理式.

再帰的関数 37
$\mathrm{Q}(z, y, v) \equiv \overline{\exists n, m, w}[n \leq \mathrm{l}(y) \wedge m \leq \mathrm{l}(z) \wedge w \leq z \wedge w = m \text{ Gl } z \wedge w \text{ Geb } n, y \wedge v \text{ Fr } n, y]$
z は y における v の自由な出現場所において束縛される変数を含まない.

再帰的関数 38
$\mathrm{L_1\text{-}Ax}(x) \equiv \exists v, y, z, n\{v, y, z, n \leq x \wedge n \text{ Var } v \wedge \mathrm{Type}_n(z) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge \mathrm{Q}(z, y, v) \wedge x = (v \text{ Gen } y) \text{ Imp } [\mathrm{Sb}\Big(y \begin{array}{c} v \\ z \end{array}\Big)]\}$
x は公理 3.3 の 1 から得られる論理式.

再帰的関数 39
$\mathrm{L_2\text{-}Ax}(x) \equiv \exists v, q, p\{v, q, p \leq x \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Form}(p) \wedge \overline{v \text{ Fr } p} \wedge \mathrm{Form}(q) \wedge x = [v \text{ Gen } (p \text{ Dis } q)] \text{ Imp } [p \text{ Dis } (v \text{ Gen } q)]\}$
x は公理 3.3 の 2 から得られる論理式.

再帰的関数 40
$\mathrm{R\text{-}Ax}(x) \equiv \exists u, v, y, n[u, v, y, n \leq x \wedge n \text{ Var } v \wedge (n+1) \text{ Var } u \wedge \overline{u \text{ Fr } y} \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge$
$\quad x = u \text{ Ex } \{v \text{ Gen } [[\mathrm{R}(u) * \mathrm{E}(\mathrm{R}(v))] \text{ Aeq } y]\}]$
x は公理 3.4 から得られる論理式.

再帰的関数 41
$\mathrm{M\text{-}Ax}(x) \equiv \exists n[n \leq x \wedge n \text{ Th } z_4]$
ただし, z_4は公理 3.5 のゲーデル数.
x は公理 3.5 から得られる論理式.

再帰的関数 42
$\mathrm{Ax}(x) \equiv \mathrm{Z\text{-}Ax}(x) \wedge \mathrm{A\text{-}Ax}(x) \wedge \mathrm{L_1\text{-}Ax}(x) \wedge \mathrm{L_2\text{-}Ax}(x) \wedge \mathrm{R\text{-}Ax}(x) \wedge \mathrm{M\text{-}Ax}(x)$
x は公理である.

再帰的関数 43
$\mathrm{Fl}(x, y, z) \equiv y = z \text{ Imp } x \vee \exists v[v \leq x \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge x = v \text{ Gen } y]$
x は y との直接帰結.

再帰的関数 44
$\mathrm{Bw}(x) \equiv \forall n\{0 < n \leq \mathrm{l}(x) \rightarrow \mathrm{Ax}(n \text{ Gl } x) \vee \exists p, q[0 < p, q < n \wedge \mathrm{Fl}(n \text{ Gl } x, p \text{ Gl } x, q \text{ Gl } x)]\} \wedge \mathrm{l}(x) > 0$
x は証明配列.

再帰的関数 45
$x \text{ B } y \equiv \mathrm{Bw}(x) \wedge [\mathrm{l}(x)] \text{ Gl } x = y$
x は論理式 y の証明.

定義 3.17 (証明可能 Beweisbar)
$\mathrm{Bew}(x) \equiv \exists y[y \text{ B } x]$
x は証明可能な論理式.

はじめに述べた通り再帰的関数 1 ∼ 45 で定義したものはすべて再帰的であるが, 上の定義 3.16 はそうではない. なぜなら, 定理 3.4 は有界量化記号に関して再帰的関係が閉じているという主張だが Bew(x) の定義では有界でないから再帰的でない.

定理 3.5 (表現定理)
任意の再帰的関係 $\mathrm{R}(x_1,\ldots,x_n)$ に対して,
関係符号 r(自由変数 $u_1,\ldots,u_n$を含む) が存在し,任意の自然数の組 $x_1,\ldots,x_n$について

$$R(x_1,\ldots,x_n) \quad \to \quad \mathrm{Bew}\left[\mathrm{Sb}\Big(r \begin{array}{c} u_1\ldots u_n \\ \mathrm{Z}(x_1)\ldots\mathrm{Z}(x_n)\end{array}\Big)\right] \tag{4}$$

$$\overline{R}(x_1,\ldots,x_n) \quad \to \quad \mathrm{Bew}\left[\mathrm{Neg}\left(\mathrm{Sb}\Big(r \begin{array}{c} u_1\ldots u_n \\ \mathrm{Z}(x_1)\ldots\mathrm{Z}(x_n)\end{array}\Big)\right)\right] \tag{5}$$

となる.

証明
再帰的関係 R が再帰的関数 ϕ で

$$R(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow x_1 = \phi(x_2,\ldots,x_n)$$

と表せるとする.
ϕ の次数に関する帰納法で定理を証明する.
次数 1 のときつまり R が (i) 定数か (ii) 後続関数. (i)$R(x_1)$ が k のとき
体系 P で k を表すと $\mathrm{Z}(k)$ は$\underbrace{f\cdots f}_{\text{k-1 個}}0$.
$x_1 = k$ を表す論理式は $u_1 = \mathrm{Z}(k)$.
これを $F(u_1)$, このコードを r とすると

$$F(u_1) \to u_1 = \mathrm{Z}(k)$$

は明らかに証明可能.
(ii)$R(x_1,x_2)$ が $x_1 = x_2 + 1$ のとき
これを表す論理式は $u_1 = fu_2$.
これを $F(u_1,u_2)$, このコードを r とする.
$x_1 = k+1, x_2 = k$ のとき $\mathrm{Z}(x_1) = f(\mathrm{Z}(x_2))$ なので $F(\mathrm{Z}(x_1),\mathrm{Z}(x_2))$ は証明可能.
ϕ の次数が k のとき定理が成り立つと仮定すると,$\phi_1,\cdots,\phi_k$ について (4),5) が成り立つような $r_1,\cdots,r_k$ がそれぞれに対して存在する.
ϕ の次数が $k+1$ のとき ϕ_{k+1}は$\phi_1,\cdots,\phi_k$ から合成と再帰的定義により定義できる。仮定より (4),(5) が成り立つことがわかる. ∎

表現定理は任意の再帰的関係 R を r でコードされた論理式の証明可能性で表現できるという主張.
これによりすべての再帰的関係が成り立つかどうかを体系 P の公理から判定できる.

例 3.3 (参考文献 [2]p95 の例)
ここまでくると我々はメタ数学的概念が形式体系 P で扱えるようになっている.
例えば「x は論理式である」というメタ数学的概念を考える.
これは前節のゲーデル数により「x と対応する自然数は論理式と対応する自然数がもつ性質を満たす」という算術的命題に言い換えることができる. これが再帰的関数 23 $\mathrm{Form}(x)$ である.
定理 3.5 より次を満たす論理式 $\phi(x)$ が存在する.$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{Form}(n) \text{ のとき} \phi(\mathrm{Z}(n)) \text{ が } P \text{ で証明できる.}$$

$$\overline{\mathrm{Form}(n)} \text{のとき} \neg\phi(\mathrm{Z}(n)) \text{ が } P \text{ で証明できる.}$$

こうして「x は論理式である」というメタ数学的概念を形式体系 P での証明可能性で表せた.

3.5　第一不完全性定理

定義 3.18 (ω 無矛盾性)
κ：論理式の集合.
$\mathrm{Flg}(\kappa)$：κ 全体と全ての公理を含み, 直接帰結で閉じた最小の集合.
次の条件を満たすクラス符号 a が存在しないとき,κ は ω 無矛盾であるという.

$$\forall n[\mathrm{Sb}\Big(a\Big(\begin{matrix} v \\ \mathrm{Z}(n)\end{matrix}\Big)\Big) \in \mathrm{Flg}(\kappa)] \wedge [\mathrm{Neg}(v \ \mathrm{Gen}\ a)] \in \mathrm{Flg}(\kappa)$$

ただし v は a の唯一の自由変数.

a の変数 v に任意の数 n を代入したものがκからすべて証明できるとき, $\neg\forall v[a]$ はκから証明されない.
また,ω 無矛盾は矛盾より強い条件である. つまり ω 無矛盾 $\Rightarrow$ 無矛盾であり逆は成立しない.

定理 3.6 (第一不完全性定理)
任意の ω 無矛盾で再帰的な論理式の集合 κ に対して, 再帰的なクラス符号 r が存在して v Gen r も $\mathrm{Neg}(v \ \mathrm{Gen}\ r)$ も $\mathrm{Flg}(\kappa)$ に属さない.

簡単にすれば $\forall v[r]$ も$\neg\forall v[r]$ も $\mathrm{Flg}(\kappa)$ に属さない r がある.
つまり, それ自身もその否定も κ から証明できないクラス符号がある.

証明
κ：ω 無矛盾で再帰的な論理式の集合とする.
次に再帰的関数 44,45, 定義 3.16 と類似した (5),(6),(7) を以下で定義する.

$$\mathrm{Bw}_\kappa \equiv \forall n\{n \leq \mathrm{l}(x) \to \mathrm{Ax}(n \ \mathrm{Gl}\ x) \vee (n \ \mathrm{Gl}\ x) \in \kappa \vee \exists p,q[0 < p,q < n \wedge \mathrm{Fl}(n \ \mathrm{Gl}\ x, p \ \mathrm{Gl}\ x, q \ \mathrm{Gl}\ x)] \wedge \mathrm{l}(x) > 0 \quad (6)$$

$$x \ \mathrm{B}_\kappa \ y \equiv \mathrm{Bw}_\kappa(x) \wedge [\mathrm{l}(x)] \ \mathrm{Gl}\ x = y \qquad (7)$$

$$\mathrm{Bew}_\kappa(x) \equiv \exists y[y \ \mathrm{B}_\kappa \ x] \qquad (8)$$

次が自明にわかる.

$$\forall x[\mathrm{Bew}_\kappa(x) \leftrightarrow x \in \mathrm{Flg}(\kappa)] \qquad (9)$$

$$\forall x[\mathrm{Bew}(x) \to \mathrm{Bew}_\kappa(x)] \qquad (10)$$

$$Q(x,y) \equiv \overline{x \ \mathrm{B}_\kappa \ [\mathrm{Sb}\Big(y \ \begin{matrix} 19 \\ \mathrm{Z}(y)\end{matrix}\Big)]} \qquad (11)$$

を定義する.
(5),(6) より $x \ \mathrm{B}_\kappa \ y$ は再帰的. 再帰的関数 17,31 より $\mathrm{Sb}\Big(y \ \begin{matrix} 19 \\ \mathrm{Z}(y)\end{matrix}\Big)$ も再帰的なので $Q(x,y)$ は再帰的.
従って, 定理 3.5 と (9) より自由変数 17,19 を含む関係符号 q が存在し, 次が成り立つ.

$$\overline{x \ \mathrm{B}_\kappa \ [\mathrm{Sb}\Big(y \ \begin{matrix} 19 \\ \mathrm{Z}(y)\end{matrix}\Big)]} \to \mathrm{Bew}_\kappa\left[\mathrm{Sb}\Big(q \ \begin{matrix} 17 & 19 \\ \mathrm{Z}(x) & \mathrm{Z}(y)\end{matrix}\Big)\right] \qquad (12)$$

$$x \ \mathrm{B}_\kappa \ [\mathrm{Sb}\Big(y \ \begin{matrix} 19 \\ \mathrm{Z}(y)\end{matrix}\Big)] \to \mathrm{Bew}_\kappa\left[\mathrm{Neg}(\mathrm{Sb}\Big(q \ \begin{matrix} 17 & 19 \\ \mathrm{Z}(x) & \mathrm{Z}(y)\end{matrix}\Big))\right] \qquad (13)$$

p, r を以下で定義する.

$$p = 17 \text{ Gen } q \tag{14}$$

p は自由変数 19 をもつクラス符号.

$$r = \mathrm{Sb}\left(q \begin{array}{c} 19 \\ \mathrm{Z}(p) \end{array}\right) \tag{15}$$

r は自由変数 17 をもつ再帰的クラス符号
(13), (14) より,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sb}\left(p \begin{array}{c} 19 \\ \mathrm{Z}(p) \end{array}\right) &= \mathrm{Sb}\left([17 \text{ Gen } q] \begin{array}{c} 19 \\ \mathrm{Z}(p) \end{array}\right) \\ &= 17 \text{ Gen } \mathrm{Sb}\left(q \begin{array}{c} 19 \\ \mathrm{Z}(p) \end{array}\right) \\ &= 17 \text{ Gen } r \end{aligned} \tag{16}$$

(14) より

$$\mathrm{Sb}\left(q \begin{array}{cc} 17 & 19 \\ \mathrm{Z}(x) & \mathrm{Z}(p) \end{array}\right) = \mathrm{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ \mathrm{Z}(x) \end{array}\right) \tag{17}$$

(11)(12) の y に p を代入し (15)(16) より次を得る.

$$\overline{x \ \mathrm{B}_\kappa \ (17 \text{ Gen } r)} \rightarrow \mathrm{Bew}_\kappa \left[\mathrm{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ \mathrm{Z}(x) \end{array}\right)\right] \tag{18}$$

$$x \ \mathrm{B}_\kappa \ (17 \text{ Gen } r) \rightarrow \mathrm{Bew}_\kappa \left[\mathrm{Neg}(\mathrm{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ \mathrm{Z}(x) \end{array}\right))\right] \tag{19}$$

以上より, 次の (i), (ii) がわかる.
(i)17 Gen r はκで証明可能でない.
なぜなら, 証明できると仮定すると,(7) より $\exists y[y \ \mathrm{B}_\kappa \ (n \text{ Gen } r)]$.
(18) より,

$$\mathrm{Bew}_\kappa \left[\mathrm{Neg}(\mathrm{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ \mathrm{Z}(n) \end{array}\right))\right]$$

従って,$\mathrm{Neg}(\mathrm{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ \mathrm{Z}(n) \end{array}\right))$ が証明可能となる.

一方,17 Gen r が証明可能ならば,$\mathrm{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ \mathrm{Z}(n) \end{array}\right)$ も証明可能になる. 従って κ が矛盾する.（さらに ω 無矛盾）
(ii)Neg(17 Gen r) はκで証明可能でない.
κ が矛盾していないとすると,(i) より 17 Gen r は証明不可能なので,

$$\forall n \overline{[n \ \mathrm{B}_\kappa \ (17 \text{ Gen } r)]}$$

が成り立つ.(17) より $\mathrm{Bew}_\kappa \left[\mathrm{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ \mathrm{Z}(n) \end{array}\right)\right]$ を得る.κ は無矛盾なので,$\mathrm{Bew}_\kappa[\mathrm{Neg}(17 \text{ Gen } r)]$ が否定される. つまり Neg(17 Gen r) が証明可能でないことがわかる.
(i), (ii) より 17 Gen r はκで決定不能であることが証明された. ∎

4　今後の課題

第一不完全性定理の証明で理解できていないところがいくつかある.
まず一つ目.3.4 メタ数学的概念の再帰的関数による表現で出てくる再帰的関数をすべて理解したとは言えない. しかしこれは各メタ数学的概念が実際に再帰的関数でかけていることを示すところなので「実際できる」と言えることがわかればいいと思っている.(言い訳)
二つ目. 定理 3.5(表現定理) の証明は厳密な証明になっていない. これはゲーデルの論文でも「この証明は原理的に難しくないが長くなるので概略だけにとどめる」とある. 証明を試みてきたがうまくいかず中途半端なまま結局間に合わなかった. この定理は不完全性定理の証明に大きな役割を担っているのでしっかりけりをつけたい.
三つ目. 第一不完全性定理の意味, 意義について. これも正直はっきりわかっていない. わかっているのは「算術を含む ω 無矛盾な形式体系に決定不能命題が存在する」という主張だけで不完全性定理は一般の数学にも適応できるのかどうかも判断できない. 形式体系では数学をどの程度記述できるのか. 数学基礎論や計算可能性理論に手を出す必要がありそう.
四つ目は第二不完全性定理. これも間に合わず手が出せなかった. 機会を見つけ必ず不完全性定理を完走したい.

参考文献

[1] Kurt Gödel(著作), 林晋/八杉満利子 (訳・解説), 不完全性定理, 岩波文庫, 2006

[2] 田中一之, ゲーデルに挑む, 東京大学出版会, 2012

[3] 結城浩, 数学ガール/ゲーデルの不完全性定理, SoftBankCreative, 2009

[4] 前原昭二, 数学基礎論入門, 朝倉書店, 1977