# ゼータ関数

芝浦工業大学　数理科学研究会
長田祐輝

2014 年 10 月 31 日

## 1　研究動機

ゼータ関数は不思議な性質を持っているのでそれについていろいろ調べたいと思った. 例えば, 平方数の逆数和は $\dfrac{\pi^2}{6}$ に収束するという性質がある. これは不思議なことで, 左辺が有理数の無限級数であるのに右辺が無理数 $\pi$ を含む式であるからである. また, 知っている人もいるかもしれないが, $1+2+3+\cdots=-\dfrac{1}{12}$ という式がある. これについても詳しく調べたいと思った.

## 2　ゼータ関数

ゼータ関数にはいろいろあるが, ゼータ関数といえばリーマンのゼータ関数のことを指す場合が多い. ゼータ関数の定義式は次に示したとおりである:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

この定義式の定義域は実部が 1 より大きい複素数全体である. この関数を使っていろいろな性質が導かれる.

### 2.1　ゼータ関数の関係式

例えば, オイラー積とゼータ関数の関係

$$\zeta(s)=\prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}}\quad : \ p \text{ は素数全体に渡る}$$

やガンマ関数とゼータ関数の関係式

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$$

などがある.

### 2.2　ベルヌーイ数

ベルヌーイ数とは $\dfrac{x}{e^x-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ としたときの $B_n$ である. このベルヌーイ数を用いるとゼータ関数の特殊値を表すことができる.
$s\geq 0$ の整数のとき,

$$\zeta(2s)=(-1)^{s+1}\frac{B_{2s}(2\pi)^{2s}}{2\times(2s)!}.$$

$s=2$ のとき平方数の逆数和を表すが, 右辺は $\dfrac{\pi^2}{6}$ となる.
$s\geq 1$ の整数のとき,

$$\zeta(-s)=-\frac{B_{s+1}}{s+1}.$$

$s=1$ のときには $1+2+3+\cdots=-\dfrac{1}{12}$ を意味する式となる.

### 2.3　リーマン予想

リーマン予想とはゼータ関数の定義域を複素数全体に広げた時に複素平面上の実部が $0\leq \mathrm{Re}(s)\leq 1$ の複素数 $s$ においてゼータ関数の値が 0 になるような $s$ は全て複素平面上の実部が $\dfrac{1}{2}$ の直線上にあるというものである. この問題は未だ未解決である. 100 万ドルの賞金もかけられており, どれほど重要な問題なのかが理解されると思う.

## 3　今後の課題

「解析接続, 極, 留数とは何なのか？」また, 「複素数におけるべき乗, 対数, 指数法則などをどのように定義するのか？」を調べていきたい. リーマン予想についても調べてみたい.

## 4　参考文献

[1] 小林　昭七:なっとくするオイラーとフェルマー, 2003 年, 講談社
[2] 松本　耕二:リーマンのゼータ関数, 2013 年, 朝倉書店
[3]「オイラーの公式の謎 : 大学教員のつぶやき」, <http://sakuraimac.exblog.jp/19944849>, (2014/09/10)
[4]「コロキウム室 (オイラーの「無限解析入門 (１)　」・その 1)」, <http://www.junko-k.com/cthema/19kaise1.htm>, (2014/09/10)
[5]「リーマンゼータ関数　-　Wikipedia」, http://ja.wikipedia.org/wiki/リーマンゼータ関数, (2014/09/12)