伊藤の定理への道標

芝浦工業大学　数理科学研究会
清水真久

2014 年 10 月 31 日

1　研究動機

高度に発展した現代社会において, 金融や経済等の諸問題はますます複雑さを加速させている. そういった問題に対して数理科学的なアプローチをし, 最適解を導く研究に以前から強い興味があった.

2　2 項格子モデル

現時点での株価を S とし, 次期において株価が確率 p で u (>1) 倍に, 確率 $1-p$ で d $(0<d<1)$ 倍になると仮定すると, 株価の動きは下図のように表せる.

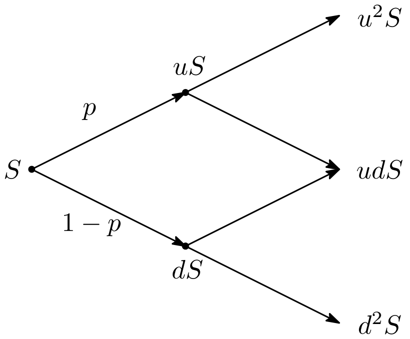

図 1: 株式の 2 項格子モデル

3　ランダムウォークとウィーナー過程

3.1　ランダムウォーク

長さ Δt の期間が N 期あるとし, 加法的モデル z を $k=0,1,\ldots,N$ について以下のように定義したものをランダムウォークとよぶ.

$$z(t_{k+1}) = z(t_k) + \varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}$$
$$t_{k+1} = t_k + \Delta t$$

但し, $\varepsilon(t_k)$ は正規確率変数であり, これらの確率変数は互いに相関がない.

3.2　ウィーナー過程

以下の 3 つの性質を持つ確率過程 $z(t)$ をウィーナー過程とよぶ.

1. 任意の $s<t$ について, $z(t)-z(s)$ が平均 0, 分散 $t-s$ の正規確率変数となる.
2. 任意の $t_{k_1} < t_{k_2} \leq t_{k_3} < t_{k_4}$ について確率変数 $z(t_{k_2})-z(t_{k_1})$ と $z(t_{k_4})-z(t_{k_3})$ は無相関である.
3. 確率 1 で $z(t_0)=0$ である.

4　伊藤の定理

$x(t)$ が伊藤過程

$$dx(t) = a(x(t),t)dt + b(x(t),t)dz(t)$$

に従うならば, それを独立変数とする任意の関数 $y(t)=F(x(t),t)$ は次の (伊藤) 方程式を満たす.

$$dy(t) = \Big(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2\Big)dt + \frac{\partial F}{\partial x}bdz(t)$$

但し, $z(t)$ は上式と同じウィーナー過程とする.

5　今後の課題

今回の研究では, 私の数学的知識が大幅に不足していたため厳密な議論を進めることができなかった. 次回の研究までに測度論, 確率微分方程式の知識を補い, 今回触れることのできなかった Black-Scholes 方程式の厳密な証明に挑みたい.

参考文献

[1] David G. Luenberger : Investment Science, 2002.4.08, 日本経済新聞社

[2] S.N. ネフツィ:ファイナンスへの数学第 2 版, 2001.7.25, 朝倉書店