ゲーデルの第一不完全性定理を読む

芝浦工業大学　数理科学研究会
数理科学科 2 年谷野徹

1　概要

ゲーデルの論文ではホワイトヘッドとラッセル共著『プリンキピア・マテマティカ』の体系 PM を簡単にしたものが使われている.PM は数学で行われているあらゆる証明を形式的に記述できる. この PM およびその関連体系において真であることも偽であることも証明できない決定不能命題が存在することを示す.

2　メタ数学的概念の算術化

形式体系では論理式は記号の有限列であり, 証明は論理式の有限列, つまり記号の有限列の有限列である. 記号に適当な方法で自然数を割り当てることで論理式と証明は自然数の有限列になる. そうすると「これは証明か」,「これは定理か」というようなメタ数学的問いが, 自然数の有限列がある性質を満たすかという数学的問いになる. 数学的問いは PM で扱えるから, いま数学的問いとなったメタ数学的問いが PM で扱えるようになる. つまり「論理式」,「証明」,「証明可能な論理式」という概念が PM のなかで扱える.

3　証明の概略

定義 3.1

- PM の論理式
- 1 つだけ自然数の自由変数をもつ

この 2 つを満たすものをクラス符号と呼ぶ.

定義 3.2

$R(n)$: クラス符号を並び上げたときの n 番目.

定義 3.3

$[\alpha; n]$: α の自由変数を自然数 n を表す PM の記号で置き換えたもの

ただし α を任意のクラス符号とする.

今定義した 3 つの概念は PM で定義できることが厳密な証明にてわかる.

定義 3.4

自然数の集合 K を次で定義する.

$$n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n); n] \tag{1}$$

$Bew\ x$: x が証明可能な論理式である

この定義に現れる概念はすべて PM で定義できるからKも PM で定義できる. (1) も n に関する 1 変数の論理式だからクラス符号 S と見れる. このとき,

$$\exists q\ s.t.\ S = R(q)$$

$[R(q); q]$ の意味は q が K に属する, つまり $[R(q); q]$ は $\overline{Bew}[R(q); q]$ であり自分は証明できないということを表す. いまから $[R(q); q]$ が PM で決定不能であるということを示す.
$[R(q); q]$ が証明できたとすると $[R(q); q]$ は真.
$[R(q); q]$ が真ならば定義より $\overline{Bew}[R(q); q]$ も真.
これは矛盾.
$\overline{[R(q); q]}$ が証明できたとすると,
これは $Bew[R(q); q]$ と同値なので $[R(q); q]$ が証明できることになる. いま.$[R(q); q]$ とその否定が両方証明できることになり体系が矛盾する. 逆に体系が矛盾していなければ.$\overline{[R(q); q]}$ は証明できない.
以上から $[R(q); q]$ と.$\overline{[R(q); q]}$ どちらも証明できないので.$[R(q); q]$ は決定不能文.

参考文献

[1] 田中一之, ゲーデルに挑む, 東京大学出版会, 2012
[2] 前原昭二, 数学基礎論入門, 朝倉書店, 1977