

ウイルス感染の数理

阿部大紘

芝浦工業大学 数理科学研究会

2015/11/6

- ① 計数過程
- ② ポアソン過程
- ③ コンタクトプロセス
- ④ 今後の課題, 参考文献

計数過程

$\{X_n\}_{n \geq 1}$ を時間間隔を表す確率変数列とし, $\{S_n\}_{n \geq 1}$ を

$$S_0 = 0,$$

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

で定義するすると, S_n は n 番目の事象が発生した時刻を表している. ここで

$$N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t, t \geq 0\}$$

を定義する. $N(t)$ は計数過程と呼ばれ, 時間間隔 $(0, t]$ の間に発生する事象の数を表す.

計数過程

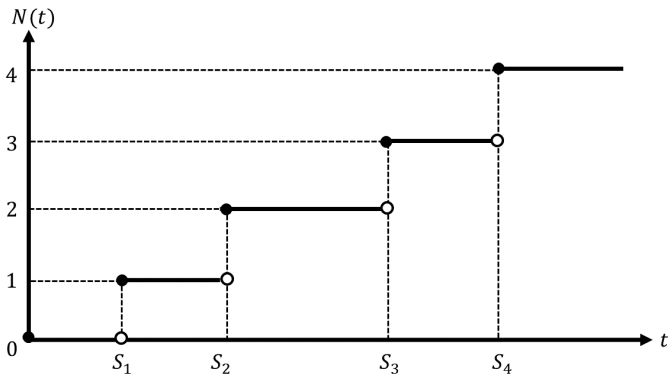


Figure: $N(t)$ のグラフ

ポアソン過程

$\{X_n\}_{n \geq 1}$ が互いに独立でいずれもパラメータ λ の指数分布に従うとき, 計数過程 $N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t, t \geq 0\}$ を密度 λ のポアソン過程と呼ぶ.

命題 1

密度 λ のポアソン過程 $N(t)$ は, パラメータ λt のポアソン分布に従う.

証明

まず, 単位時間あたりに事象が λ 回起こることから, 時刻 t までに事象は λt 回起こる. 次に, 時刻 t を m 分割する. すると, 各時間で事象が起こる確率は $\frac{\lambda t}{m}$ であることがわかる. よって, 時間 t で見てみれば, "各時間で確率 $\frac{\lambda t}{m}$ で起こる事象を m 回選んだときの事象の数" と見なせるので $Bin\left(m, \frac{\lambda t}{m}\right)$ に従う. $m \rightarrow \infty$ とすれば二項分布をポアソン近似でき, $P_0(\lambda t)$ を得る.

命題 2

$s \geq 0, s \in \mathbb{Z}$ に対し

$$N_s(t) = N(t + s) - N(s), \quad t \geq 0$$

なる $N_s(t)$ を定義する. $\{N_s(t), t \geq 0\}$ は密度 λ のポアソン過程となる.

証明

$N_s(t)$ は時間間隔 $(s, s + t]$ に起こった事象数を表す. 時刻 s の直前, 直後の事象の生起時点をそれぞれ $S_{N(s)}, S_{N(s)+1}$ とすると,

$$\begin{aligned} & P(S_{N(s)+1} - s > y \mid N(s) = k, S_{N(s)} = x) \\ &= P(S_k + X_{k+1} - s > y \mid N(s) = k, S_{N(s)} = x) \\ &= P(X_{k+1} > s + y - x \mid X_{k+1} > s - x) \\ &= e^{-\lambda y}. \end{aligned}$$

よって, $N_s(t)$ において, 最初の事象が発生するまでの時間間隔がパラメータ λ の指数分布に従うので, 題意を満たす.

ウイルス感染を記述できる確率モデル. 1960年代に統計力学, 素粒子物理学の出現とともに現れた代物. その後, 数学的理論の発展とともに進化を続け, 今に至る.

ここでは \mathbb{Z}^1 上のウイルスの伝播について述べる. とはいえ, この場合でも確率過程は十分複雑である.

仮定 1

- ① \mathbb{Z}^1 の各点に人がいる.
- ② 人は”病気”か”健康”のどちらかである.
- ③ 病気の方は隣の方の状態に関係なく一定時間が経つと健康になる. その時間はパラメータ 1 の指数分布に従う.
- ④ 隣の k 個 ($k = 0, 1, 2$) の方が病気で, 変化しないという条件のもとで中央の方が病気になるまでにかかる時間はパラメータ λt の指数分布に従う.
- ⑤ 時刻 0 では少なくとも 1 人が病気の状態である.

仮定 2

- ① η を \mathbb{Z}^1 の各点から $\{0, 1\}$ への関数とする.
 - $\eta(x) = 0$ は x にいる人が健康であることを表す.
 - $\eta(x) = 1$ は x にいる人が病気であることを表す.
- ② 各 $x \in \mathbb{Z}^1$ に対して以下の確率過程をすべて独立に仮定する.
 - 密度 1 のポアソン過程 $N_x(t)$.
 - 密度 λ のポアソン過程 $N_{x,r}^\lambda(t)$, $N_{x,l}^\lambda(t)$.

x における t の直前の状態を $\eta(t-; x)$ とする.

x において、時刻 t で $N_x(t)$ が変化したとき

- ① $\eta(t-; x) = 1$ のとき、 $\eta(t; x) = 0$ とする.
- ② $\eta(t-; x) = 0$ のとき、 $\eta(t; x) = 0$ のままにする.

x において、時刻 t で $N_{x,r}^\lambda(t)$ が変化したとき

- ① $\eta(t-; x) = 0$ かつ $\eta(t-; x+1) = 1$ のとき、 $\eta(t; x) = 1$ とする.
- ② それ以外のときは何もしない.

x において、時刻 t で $N_{x,l}^\lambda(t)$ が変化したとき

- ① $\eta(t-; x) = 0$ かつ $\eta(t-; x-1) = 1$ のとき、 $\eta(t; x) = 1$ とする.
- ② それ以外のときは何もしない.

全体の時間変化 $\eta(t) = \{\eta(t; x); x \in \mathbb{Z}^1\}$ が構成できていることを確かめる。まず、 K を任意の自然数とし、区間 $[-K, K]$ の中に人を置いた場合を考え、確率過程が構成できていることを確かめる。そこで、

$$N_K = \{N_x(t), N_{x,r}^\lambda(t), N_{x,l}^\lambda(t); x \in [-K, K]\}$$

とおくと各ポアソン過程は有限時間には確率 1 で有限の値をとっているので、 N_K は確率 1 で有限回の変化しかしていない。よって、 N_K が変化する時刻は、小さい順に

$$0 < t_1 < \cdots < t_m < \cdots$$

と並べることができる。 $0 \leq t < t_1$ では、まだ N_K は変化していないので、

$$\eta(t; x) = \eta(0; x) \quad \forall x \in [-K, K]$$

が成り立つ。したがって、最初の変化が起こったとき、 $\eta(t_1)$ が決まれば、その状態から出発して、次々に確率過程 $\eta(t)$ が決まる。

$t = t_1$ とする.

x_0 において, $N_x(t)$ が変化するとき

- ① $\eta(0; x_0) = 0$ ならば, $\eta(t_1; x) = \eta(0; x)$. ($x \in [-K, K]$)
- ② $\eta(0; x_0) = 1$ ならば, $\eta(t_1; x_0) = 0$, $\eta(t_1; x) = \eta(0; x)$. ($x \in [-K, K] \setminus \{x_0\}$)

x_0 において, $N_{x,r}^\lambda(t)$ が変化するとき

- ① $\eta(0; x_0) = 0$ かつ $\eta(0; x_0 + 1) = 1$ のとき,
 $\eta(t_1; x_0) = 1$, $\eta(t_1; x) = \eta(0; x)$ ($x \in [-K, K]$)
- ② それ以外するとき, 変化なし.

x_0 において, $N_{x,l}^\lambda(t)$ が変化するとき

- ① $\eta(0; x_0) = 0$ かつ $\eta(0; x_0 - 1) = 1$ のとき,
 $\eta(t_1; x_0) = 1$, $\eta(t_1; x) = \eta(0; x)$ ($x \in [-K, K]$)
- ② それ以外するとき, 変化なし.

$\eta(t_2), \eta(t_3), \dots$ も同様の考えから求めることができ, $\eta(t)$ を作ることもできる. 興味がある人は求めてみてください.

ここに命題を載せる. 興味のある人は証明してみてください.

命題 3

$\eta(t)$ は右連続関数である.

$\eta(t)$ がわかっているときに, x にいる人の状態の変化の確率を求める.

時間演算子

一般時間区間内に対し N_K が変化した時刻を $T(N_K)$ と定義する.

$\eta(t; x) = 1$ のとき

$$\begin{aligned} P(\eta(t; x) = 0 \mid \eta(t)) \\ &= 1 - P(N_x(t+h) = N_x(t) \mid \eta(t)) \\ &= 1 - e^{-ht}. \end{aligned}$$

$\eta(t; x) = 0$ かつ $\eta(t; x-1) = \eta(t; x+1) = 1$ のとき

$$\begin{aligned} P(\eta(t; x) = 1 \mid \eta(t)) \\ &= 1 - \{P(N_{x,r}^\lambda(t+h) = N_{x,r}^\lambda(t), N_{x,l}^\lambda(t+h) = \\ &N_{x,l}^\lambda(t) \mid \eta(t)) + P([t, t+h], T(N_{x+1}) < T(N_{x,r}^\lambda), T(N_{x-1}) < T(N_{x,l}^\lambda) \mid \eta(t))\} \\ &= 1 - \{e^{-2\lambda h} + dt\}. \end{aligned}$$

$\eta(t; x) = 0$ かつ $\eta(t; x - 1) = 1, \eta(t; x + 1) = 0$ のとき

$$\begin{aligned} P(\eta(t; x) = 1 \mid \eta(t)) &= 1 - \{P(N_{x,l}^\lambda(t+h) = N_{x,l}^\lambda(t) \mid \eta(t)) + P([t, t+h], T(N_{x-1}) < T(N_{x,l}^\lambda) \mid \eta(t))\} \\ &= 1 - \{e^{-\lambda h} + dt\}. \end{aligned}$$

$\eta(t; x) = 0$ かつ $\eta(t; x - 1) = 0, \eta(t; x + 1) = 1$ のとき

$$\begin{aligned} P(\eta(t; x) = 1 \mid \eta(t)) &= 1 - \{P(N_{x,r}^\lambda(t+h) = N_{x,r}^\lambda(t) \mid \eta(t)) + P([t, t+h], T(N_{x+1}) < T(N_{x,r}^\lambda) \mid \eta(t))\} \\ &= 1 - \{e^{-\lambda h} + dt\}. \end{aligned}$$

$\eta(t; x) = \eta(t; x - 1) = \eta(t; x + 1) = 0$ のとき

このときは、 x にいる人に病気が移るまでに $x \pm 1$ にいる人がまず病気にならないといけなないので、 $P(\eta(t; x) = 1 \mid \eta(t)) = dt$.

問題点

どんなに短い時間でも N_K は確率 1 で変化するため, 最初に変化する点が決められず, 安易に $K \rightarrow \infty$ としてはいけない.

解決策

\mathbb{Z}^1 上で $[0, 1]$ に対し $\eta(t)$ を構成すればよい. しかし, これにはボレルカンテリの定理を証明しなくてはいけないので今の私にとっては困難. 興味のある人はチャレンジしてみてください.

命題 4

$x \in \mathbb{Z}^1, \eta(0; x) \leq \xi(0; x) \Rightarrow t > 0, \eta(t; x) \leq \xi(t; x).$

命題 5

$\eta^+(t)$ を初期状態においてすべての人が病気であるコンタクトプロセスと定義する. このとき,

$$\rho(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[\eta^+(t; 0)]$$

なる $\rho(\lambda)$ が存在し, 存在確率とよばれる. $\rho(\lambda)$ は単調増加関数である.

命題 6

$$\lambda_c = \inf\{\lambda > 0; \rho(\lambda) > 0\}$$

なる λ_c を臨界値と定義する. このとき, $1 < \lambda \leq 2$ が成り立つ.

今後の課題

コンタクトプロセスの研究はひとまず置いておき, 他の確率過程も研究してみたい.

参考文献

[1] 確率過程入門, 2007, 培風館

ご清聴ありがとうございました.