多項式の解法

芝浦工業大学　数理科学研究会

平成 27 年 11 月 6 日

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

制作: BV15005 石川直幹

目 次

1 対称式, 置換 **2**
1.1 基本対称式 2
1.2 判別式 3
1.3 置換 4
1.4 交代式 7
1.5 多項式と置換群 9

2 方程式の解法 **14**
2.1 二次方程式の解法 14
2.1.1 平方完成 14
2.1.2 Lagrange の解法 15
2.2 三次方程式の解法 16
2.2.1 Cardano の公式 16
2.2.2 三角関数による解法 18
2.2.3 Lagrange の解法 22
2.3 四次方程式の解法 23
2.3.1 Ferrari の公式 23
2.3.2 Euler の公式 24
2.3.3 Lagrange の解法 26

3 分解式の作り方 **27**
3.1 三次の場合 27
3.2 四次の場合 29

4 分解方程式の計算 **30**
4.1 二次分解方程式 (原三次方程式) の場合 30
4.2 三次分解方程式 (原四次方程式) の場合 32

5 五次方程式の解法 **35**

6 補遺 **35**

7 参考文献 **37**

1　対称式, 置換

1.1　基本対称式

n 個の変数 $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n$ に関する有理式において, それらの変数をいかなる順序に置き換えてもその式が変わらないならば, それをこれらの変数の対称式という.

対称な有理式は対称な多項式の商として表すことができる (後に説明) から, 本節では多項式のみを取り扱う. すなわち単に多項式とは, 対称な多項式を指す.

例えば, $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n$ または, $x_1x_2\dots x_n$ などは最も簡単な対称式である.

対称式が方程式論で重要なのは, 方程式の解と係数の関係に基づく. n 次の方程式

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

の解を $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n$ とすれば, 恒等的に

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

展開して, 係数を比較すると

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= -a_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= a_2 \\ &\vdots \\ \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k=l}^{n-1} x_kx_{k+1} &= (-1)^k a_k \\ &\vdots \\ x_1x_2\dots x_n &= (-1)^n a_k \end{aligned}$$

これらはいずれも $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n$ の対称式である. これを基本対称式という. 基本というのは, すべての対称式が, これらの n 個の対称式の整式として表し得るからである.

対称式 $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が

$$Cx_1^{e_1}x_2^{e_2}\dots x_n^{e_n}\ (e_1,\ e_2,\ \dots\ ,e_n \geq 0,\ C: \text{係数})$$

のような項を含むならばこの項における $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n$ の順序を変えて作られる

$$Cx_\alpha^{e_1}x_\beta^{e_2}\dots x_\lambda^{e_n}$$

のような項が必ず S の中に含まれなければならない. $\alpha,\ \beta,\ \dots\ ,\lambda$ は $1,\ 2,\ \dots\ ,n$ なる番号の順列である. このように, 一つの項から変数の置き換えによって定まるのであるが, 同型の項の中には最大の指数が x_1 につき, 第二の大きさの指数が x_2 につくように変数の番号と指数の大小の順序とが一致するものが必ずあるので, 項の型を示す指数の組合せは

$$e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n$$

とできる.

同型の項をことごとく加えた和は, 一つの対称式で, これを単型の対称式という. すべての対称式は単型の対称式に定数係数を乗じたものの和に分解することができる.

単型対称式に次のようにして順位をつけることができる. まず最大指数の大小によって, 最大指数が相等しいときには, 第二の大きさの指数の大小によって, というようにして, 順位を決め, 上から高位, 低位としていく. この規定によれば, 最低位の対称式は $(0,\ 0,\ \dots\ ,0)$ で, それは定数である.

1.2 判別式

対称式の例として, 方程式論で重要な判別式をあげることができる.n 個の変数 $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n$ の二つずつの積を

$$\begin{aligned} P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots \quad & (x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_3)\dots \quad & (x_2 - x_n) \\ \vdots \quad & \\ & (x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

とする. ここでは小さい番号の x を被減数にして差を書いたが, もしそうでないならば, P の代わりに $-P$ が生じえる, 例えば上の P の式で x_1 と x_2 を交換すれば, 第一の因子 $x_1 - x_2$ は符号が変わり, その他の第一行の各因子と第二行の各因子とは, 互いにその位置を交換し, ほかは変わらないから, P は $-P$ になる. 同様に, 任意の二つの x を交換しても, P は $-P$ となるのは明らかである.

実際, P において変数 $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n$ の順序を変えて $x_h,\ x_k$ を第一, 第二の位置に置いたときに生ずる式を P' とすれば, $P' = \pm P$. さらに, P' において第一, 第二の変数である $x_h,\ x_k$ を交換すれば, P' は $-P'$ になるから, P もやはり $-P$ にならなければならない.

このように, P は対称式ではないが, P^2 は変数の置換によって変わらないことは明らかで, すなわち P^2 は対称式である.

P^2 を展開すれば, 最高位の型の項として $x_1^{2(n-1)}x_2^{2(n-2)}\dots x_{n-1}^2$ を得るから, いま $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n$ を方程式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

の解とし, さらに

$$D = a_0^{2(n-1)}P^2$$

とおくと, D は $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,a_n$ に関して $2(n-1)$ 次の斉次になる. またその式は斉重で, 重さは $n(n-1)$ に等しい, 例えば, $n = 2$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^2 + a_1x + a_2 \\ D &= a_0^2(x_1 - x_2)^2 = a_1^2 - 4a_0a_2 \end{aligned}$$

D を方程式 $f(x) = 0$ または多項式 $f(x)$ の判別式という.

定理 2.1

$$\text{判別式 } D = 0. \ \Leftrightarrow \ f(x) \text{ が重解をもつ.}$$

(証明)

$$\text{判別式 } D = 0. \ \Rightarrow \ f(x) \text{ が重解をもつ.}$$

このことは, $D = 0$ ならば, $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n$ のうち二つ以上が同じ数 (例えば, $x_1 = x_2,\ x_1 = x_2 = x_3$) となるから, $f(x)$ が重根をもつをもつので明らかである.

$$\text{判別式 } D = 0. \ \Leftarrow \ f(x) \text{ が重解をもつ.}$$

このことは, $f(x)$ が重根をもつならば, 根である $x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n$ のうち二つ以上が同じ数 (例えば, $x_1 = x_2,\ x_1 = x_2 = x_3$) なので, $D = 0$ となるのは明らかである.
以上より,

$$\text{判別式 } D = 0. \ \Leftrightarrow \ f(x) \text{ が重解をもつ.}$$

となる. QED .

1.3　置換

相異なる n 個の物を一つの順序から他の順序に置き換えることを置換という．ここでは, 置換される物に 1, 2, 3, ... ,n の番号を付けて, これらの物をその番号で示すことにする.

n 個の物を $n!$ の相異なる順列に並べることができて, 置換によって $123\ldots n$ なる順列から任意の順列に移ることができるから, 置換の総数は $n!$ である．ただし, いわゆる恒等置換 (各々の物を元の位置のまま移動させない置換) も含む.

置換の記法は次のようにする．例えば, 12345 を 35214 にする置換を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

としるす．上がもとの順序で, 下が置換を行った後の順序である．もし上と下の列を交換すれば, それは逆の置換を表す．上のように, 置換を一つの文字 P で表すならば, その逆の置換を P^{-1} で表す．すなわち,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} .$$

置換 P を行った後, 更に, 置換 Q を行うならば, その効果はある一つの置換と同じである．その置換を R とするとき, この関係を次のようにしるす.

$$PQ = R .$$

このようにして置換 P, Q から置換 R を作ることを置換の結合という．例えば,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} , \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

置換の結合においては, 交換法則は一般に成り立たない.

結合法則は置換にも当てはまる．すなわち, $(AB)C = A(BC)$．よって, 括弧を略して ABC としるす．三つより多くても同様に当てはまる.

同一の置換をいくつも結合する場合には, できの記法を襲用する.
例えば,

$$PP = P^2, \ PPP = P^3$$

公式として

$$(1)(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(2)(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

(証明)
(1) 両辺の左から (AB) を結合すると,
左辺 $= 1$ (1 は恒等置換を表す)
右辺 $= (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = 1 =$ 左辺.
QED
(2) も同様.

n 個の物の中二つ, 例えば, $a,\ b$ だけの位置を交換して, その他の物は動かさないような置換を特に互換といい, それを $(a\ b)$ で表す.
例えば,

$$(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} .$$

全ての置換を互換の結合によって作ることができる.
例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 5)(1\ 2)(1\ 4) .$$

一つの置換 A を互換に分解する仕方は幾通りもある.
例えば,
上の例でまず $(4\ 5)$ を行って 4 を最後の位置に来るようにしても良い. また, 互換の数をなるべく少なくすることを考えなければ途中で任意の互換を行うこともできる.

$$\begin{aligned} A =&(4\ 5)(1\ 5)(2\ 3)(3\ 5) \\ =&(2\ 3)(1\ 5)(3\ 4)(1\ 4)(3\ 5)(1\ 5) . \end{aligned}$$

このように, 与えられた置換を互換に分解する仕方は限りなくあるが, 結果において, 互換の数が奇数であるかまたは偶数であるかは一定である.

これを証明するのに 1.2 判別式 の多項式,

$$\begin{aligned} P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots \quad & (x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_3)\dots \quad & (x_2 - x_n) \\ \vdots \quad & \\ & (x_{n-1} - x_n) \quad . \end{aligned}$$

の性質を利用する. 置換によって動かされているものは n 個の変数 $x_1,\ x_2,\ \dots, x_n$ であるが, ここではその番号だけに着眼する. n 個の変数に任意の置換を行うときに, 多項式 P は $\pm P$ のどちらかに変わるから, $\pm P$ の二種類に分かれる. しかるに () のいった通り, P は二つの変数を互換するごとにその符号を変えるから, $P = +P$ のときの置換は偶数の互換の結合であり, $P = -P$ のときの置換は奇数の互換の結合でなければならない.

いま一つの順列において大きい数字が小さい数字の前にあることを順位の反転と名付けることにする.
例えば,
順列 35214 では, 3 よりも小さい番号 $1, 2$ が 3 の後にあるから, そこに二つの反転があり, また, 5 と $1, 2, 4$ との間に三つの反転, 2 と 1 の間に一つの反転があり, 合わせて 6 個の反転がある.

さて $123\ldots n$ に一つの互換を行うときに生ずる反転の数が偶数ならば, その置換を上の多項式 P に行えば, 因子の中で符号が変わるものが偶数個であるから, その置換は $+P$, もし反転の数が奇数ならば, その置換は $-P$. つまり, これによって $n!$ の置換を偶の置換と奇の置換とに区別する.

この二つは, まず全ての偶の置換を列挙したと想像して, それらにある一定の互換, 例えば, $(1,2)$ を結合するならば, その結果は相異なる同数の奇の置換であるから, 偶の置換の数は奇の置換の数よりも多くない. また, 同様に奇の置換の数は偶の置換の数よりも多くはないから, 双方同数となる.
以上より,

定理 3.1
n 個の物の置換 $n!$ 個の中, 半数は偶の置換で, 半数は奇の置換である. 前者は互換の結合で, $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,n$ の間に偶数の反転を生ずる. それを多項式 P の変数に行うときは, $+P$ となる. 後者は奇数個の互換の結合で, $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,n$ の間に奇数の反転を生じ, P を $=P$ にする.
任意の置換は互換の結合によって作られるから, 一つの多項式が対称式であることを確かめるのに, n 個の変数を $n!$ 個に置き換えてみるまでもなく, 変数を二つずつ互換して, その都度多項式が変わらないことを確かめれば十分である. つまり, 手間を省ける. それは次の事実に基づく.

すべての互換, 従って, 全ての置換は, ある一定の番号, 例えば, 1 を含む $n-1$ の互換 $(1\,2)$, $(1\,3)\ \ldots\ ,(1\,n)$ から結合によって作ることができる.
ゆえに変数 $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n$ の多項式が x_1 と他の変数とを互換しても変わらないならば, その多項式は対称式である.

循環置換というのは, $a,\ b,\ c,\ \ldots\ ,k,\ l$ なる物があるときに, a を b で, b を c で, $\ldots$,k を l でで置き換え, 最後の l を最初の a で置き換えるもので, それを,

$$(a\ b\ c\ \ldots\ k\ l)$$

としるす. つまり

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & k & l \\ b & c & d & \ldots & l & a \end{pmatrix} = (a\ b\ c\ \ldots\ k\ l) = (b\ c\ \ldots\ k\ l\ a) =\ \ldots\ = (l\ a\ b\ c\ \ldots)\ .$$

すべての置換は同一の物を含まない循環置換の結合によって作ることができる.
例えば,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 8 & 9 & 2 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}\ .$$

において, 1 は 4 で置き換えられ, その 4 は 9 で, また 9 は 7 で, 7 は 1 で置き換えられる. すなわち $1,\ 4,\ 9,\ 7$ が循環的に置き換えられる. 同様に考えると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 8 & 9 & 2 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 9\ 7)(2\ 5)(3\ 8\ 6)\ .$$

また

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 8 & 9 & 2 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 9\ 7\ 5)(2\ 6\ 8\ 4)(3)\ .$$

今回, 3 は移動しない. それは 3 一個で一つの環を作るものと見なしてもよく, また (3) はしるさなくてもよい.

1.4 交代式

n 個の変数の多項式がどのような置換を行っても対称式であるが, その反対に変数の順序を変えるごとに異なる多項式に変わり, 全体において $n!$ 個の相異なる形を生ずる場合もある. 例えば, $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ において係数 $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,a_n$ がみな相異なるときである. これら極端な場合の中間に, 一部対称式の性質をもつ多くの場合があり得るが, その中で最も対称式に近い場合として, 変数すべての置換によって二つの相異なる形を生ずる多項式を考察する.

$f(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n)$ をこのような多項式とすれば, 変数の置換が f を変えないものと f を f_1 に変えるものと二組に分かれるというのが仮定である.

f_1 もやはり同じ $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n$ の多項式であるが, f_1 において変数の置換を行うときに出て来るものは, つまり f から変数の置換によって出て来るものにほかならないから, それは f か f_1 である. ゆえに f と f_1 において, 同一の置換 S を行うときには, f も f_1 も変わらないか, f が f_1, f_1 が f に変わるのどちらかである (f は変わらないで f_1 が f に変わり, または f が f_1 に変わり, f_1 は変わらないということはあり得ない. さもなくば, f か f_1 から S の逆の置換によって二つの異なる多項式が生ずるだろう).

ゆえに $f+f_1$ はいかなる置換によっても変わらない, すなわち対称式である. また $f-f_1=F$ とおけば,F はある置換によっては変わらないが, ある置換によっては符号だけ変えて $-F$ になる. そこで, まず F を求める.

仮定より, F^2 はいかなる置換によっても変わらないから対称式である. また F 自身は対称式でないから, ある互換によって, $-F$ になる. いま F は互換 $(x_1\ x_2)$ によって $-F$ に変わるとすると,

$$F(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n)=-F(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n)\ .$$

ゆえに $x_1=x_2$ とすれば

$$F(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n)=-F(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n)=0\ .$$

となり, $F(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n)$ は (x_1-x_2) で割り切れる. いま F はちょうど $(x_1-x_2)^h$ で割り切れるとすれば, F^2 は $(x_1-x_2)^{2h}$ で割り切れるが, F^2 は対称式であるから, それが $(x_1-x_2)^{2h}$ 割り切れるならば, 1.2 判別式 の多項式の二乗で割り切れなければならない. したがって, F は P^h で割り切れるので

$$F=P^hF_1$$

とおくと, F も P^h ある置換によって符号が変わるだけなので, F_1 もまた同様である. ゆえに F_1 が対称式でないならば, F_1 はある互換によって $-F_1$ になる. もしそうならば, 前と同様に F_1 は $(x_\lambda-x_\mu)$ のような一次因数をもち, よって F_1 が P で割り切れることになるのであるが, 仮定によって F は因数 x_1-x_2 を h 乗にだけ含むのであるから, F_1 は P で割り切れない. ゆえに F_1 は対称式でなければならない. ならば, 上の等式において, 指数 h は奇数でなければならない (もし h が偶数ならば P^h は対称式, したがって F も対称式になってしまう). h が奇数ならば, P^{h-1} したがってまた $P^{h-1}F_1$ は対称である. それを S とすると,

$$F=P\cdot S\ .$$

すなわち問題の多項式 F は P と対称式の積でなければならない. したがって F は偶の置換によっては変わらず, 奇の置換によって $-F$ に変わるものである. このような多項式を交代式という.

初めの問題に返って, $f+f_1$ は対称式, $f-f_1$ は PS に等しいから加法によって

$$f = S_1 + PS_2$$

を得る．ただし S_1, S_2 は対称式を示す．つまり f は偶の置換では変わらず, 奇の置換では $f_1 = S_1 - PS_2$ に変わる．

この問題で注意すべきことは, ある多項式を変えない置換と, 変える置換の区別が任意にはできないことである．上の場合では, f を変えない置換は偶の置換の全部でなければならない．

定理 4.1
有利対称式は対称である多項式の商として表し得る．

(証明)
f, g が x_1, x_2, $\ldots$,x_n の多項式で, 公約数をもたず, かつ

$$\frac{f}{g}$$

が変数の置換によって変わらないことがいえれば, f と g とが別々に対称式となる．よって,
背理法を用いて, f が対称式でないと仮定する．f はある互換, 例えば $(x_1\ x_2)$ によって変わらなければならない．この互換によって f は f_1 に, g は g_1 になるとすれば, 仮定より, $\frac{f}{g}$ は対称式だから

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}\ .$$

また, f と g は公約数をもたないと仮定したから, f_1, g_1 は f, g で割り切れるので

$$f_1 = hf,\ g_1 = hg\ .$$

f_1 は変数の置換によって f から生じたのであるから, f と同次である．したがって h は定数である．$f_1 = hf$ の両辺において再び x_1 と x_2 とを互換すれば, $f = hf_1$. ゆえに

$$f_1 = h^2 f_1\ ,$$
$$h = -1\ .$$

したがって, $f_1 = -f$,$g_1 = -g$. すなわち f ,g は互換 $(x_1\ x_2)$ によって符号を変えるから, 前の証明にもあるように, f, g は $(x_1 - x_2)$ で割り切れなければならない．これは, f, g が公約数をもたないという仮定に矛盾するから, f は対称式でなければならず, 同様に, g も対称式でなければならない．

1.5　多項式と置換群

多項式 $f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n)$ から変数の置換 S によって生ずる多項式を Sf または $f|S$ としるす.$f|S$ において, 更に置換 S' をおこなうのと, 効果は同じである.
すなわち (記号 Sf を使うと, $S'(Sf) = S'Sf$ となり, S と S' の順序が逆になって都合が悪いので)

$$(f|S)S' = f|SS'\ .$$

いま f は置換 S によっても, S' によっても変わらないならば

$$\begin{aligned} f|S =& f \\ f|S =& f|S' = f\ . \end{aligned}$$

つまり, f は置換 SS' によっても変わらない. すなわち f を変えない置換を結合すれば, やはり f を変えない置換が生ずる. ゆえに f を変えない置換を全てあげて, それらを

$$S,\ S',\ S'',\ \ldots \tag{1}$$

とし (この中に恒等置換があり, また各置換の逆の置換, 各置換の冪がある), これらの置換を一組として見れば, この組の中にある置換から結合によって生ずる置換は必ずこの組の中に含まれている. このような一組の置換は群を成すという.
例えば, f が交代式ならば, f を変えない置換は偶の置換で, 偶の置換の全部は一つの群を成す. これを交代群という.
いま, 多項式 f を

$$f|S = f_1,\ f \neq f_1$$

とすると, (1) の各置換の右に T を付けて作られる結合置換

$$ST,\ S'T,\ S''T, \ldots \tag{2}$$

は f を f_1 に変える置換の全体である. 実際,

$$f|ST = (f|S)T = f|T = f_1$$

であるが, 逆に, $f|Q = f_1$ とするならば

$$f|QT^{-1} = f_1|T^{-1} = f$$

だから, QT^{-1} は f を変えない置換である. ゆえに

$$\begin{aligned} QT^{-1} =& S^{(v)} \\ QT^{-1}T =& s^{(v)}T \\ Q =& s^{(v)}T \end{aligned}$$

となるので, (2) が f を f_1 に変える置換の全部である.

このようにして, f から変数の置換によって生ずる相異なる多項式が (f も入れて)i 個あるとして, それらを

$$f,\ f_1,\ \ldots, f_{i-1}$$

とすれば, それに応じて, $n!$ の置換が (1)(2) のような同数の i 組に分かれる. そのうち一組は f を変えない置換の群で, それに属する置換の数 (それを群の位数という) を g とすれば

$$n! = gi$$

なる関係がある. よって次の定理を得る.

定理 5.1
n 個の変数の多項式から, 変数の置換によって生ずる相異なる多項式の数 i は (原の多項式も入れて)$n!$ の約数である. この多項式を変えない置換は群を成し, その置換の数 (群の位数) は $\frac{n!}{i}$ に等しい.
例えば,

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ) = x_1 + x_2 - x_3$$

の置換を考えると

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_2 + x_1 - x_3 = f$$
$$f(x_3,\ x_2,\ x_1) = x_3 + x_2 - x_1 = f_1$$
$$f(x_1,\ x_3,\ x_2) = x_1 + x_3 - x_2 = f_2$$

となり, $f,\ f_1,\ f_2$ の三つで, $x_1,\ x_2,\ x_3$ の順列は $3! = 6$ 通りなので
$\dfrac{6}{3} = 2$ 個の恒等置換がある.

多項式 f から置換によって生ずる多項式はもちろん同じ変数の多項式であるが, 今それらの多項式

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \dots\ , f_{i-1}$$

の任意の置換を行うならば

$$f|P,\ f_1|P,\ \dots\ , f_{i-1}|P$$

はつまり f から置換によって生じた i 個の相異なる多項式であるから, ($f_1|P = f|T_1P_1$ など), 全体としては $f,\ f_1,\ \dots\ f_{i-1}$ と同一で, ただ順序において違い得るのみである.
ゆえに,

$$f + f_1 + f_2 + \ \dots\ + f_{i-1}$$

は変数の任意の置換 P によって変わらない, 即ち, 対称式である. $f,\ f_1,\ \dots\ , f_{i-1}$ の積や任意の対称式に関しても同様である.

定理 5.2
変数の有理式から変数の置換によって生ずる相異なる有理式の対称式は変数 $x_1,\ x_2,\ \dots\ , x_n$ に関して対称式である.

三次および四次の方程式の解法のために,

定理 5.3
有理式 $f(x_1,\ x_2,\ \dots\ , x_n)$ を変えない置換によって, 他の有理式 $\varphi(x_1,\ x_2,\ \dots\ , x_n)$ が変わらないならば

$$\varphi = \frac{a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \dots}{a'_0 + a'_1 f + a'_2 f^2 + \dots}$$

のような恒等式が成り立つ. 右辺において分母も分子も f に関する多項式で, a という文字で表されている係数は $x_1,\ x_2,\ \dots\ , x_n$ の対称式である.
例えば,
(証明)
前と同じ記号を用いて

$$f|T_1 = f_1,\ \dots\ , f|T_{i-1} = f_{i-1}$$

また

$$\varphi|T_1 = \varphi_1,\ \dots\ , \varphi|T_{i-1} = \varphi_{i-1}$$

とする.

$$F(X) = (X - f)(X - f_1)\dots(X - f_{i-1})$$

とおいて, 右辺を展開すれば

$$F(X) = X^i + S_1X^{i-1} + S_2X^{i-2} + \cdots + S_i$$

$S_1,\ S_2,\ \dots\ , S_i$ は変数 x の対称式である (定理 5.2).

$$F(X) = \left\{ \frac{\varphi}{X - f} + \frac{\varphi_1}{X - f_1} + \dots \frac{\varphi_{i-1}}{X - f_{i-1}} \right\} = G(X) \tag{3}$$

とおけば, G は X に関する多項式である. 左辺の括弧の中の各項において, 変数 x に任意の置換を行えば, 項の順列だけが変わり得るだけなのは定理 5.2 と同様であるから, 括弧の中, 従ってまた $G(X)$ は変数 $x_1,\ x_2,\ \dots\ , x_n$ に関して対称式である. ゆえに $G(X)$ は次のような形の式である.

$$G(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{i-1} X^{i-1}$$

さて (3) の両辺において $X = f$ とおけば, 左辺では $\frac{F(X)\varphi}{X-f}$ が $F'(f) \cdot \varphi$ になり ($F'(X)$ は導関数), その他は 0 になるから,

$$F'(X) = \varphi = G(f) \ .$$

ゆえに,

$$\varphi = \frac{G(f)}{F'(f)} = \frac{a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{i-1} f \ i - 1}{i f^{i-1} + (i-1) S_1 f^{i-1} + \ldots S_{i-1}}$$

即ち定理の言うとおりである. (行掛かり上記号は違った). φ の分母も分子も, f に関して $i-1$ 次以下である. QED.

定理 5.4

$$f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_n)\ (n \in \mathbb{N})$$

のとき,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x-\alpha_l} =& \frac{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}{(x-\alpha_l)} \\ =& a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\ (1 \leq l \leq n)\end{aligned}$$

$x = \alpha_l$ とすると,

$$a(\alpha_l-\alpha_1)(\alpha_l-\alpha_2)\ldots(\alpha_l-\alpha_n) = f'(\alpha_l)$$

となる.
(証明)
$n = 1$ のとき,

$$\begin{aligned}f_1(x) = a(x-\alpha_1) = ax - a\alpha_1 \\ f_1(x) = a\end{aligned}$$

より, $f'(\alpha_1) = a$

$$\frac{a(x-\alpha_1)}{x-\alpha_1} = a = f_1'(\alpha_l)$$

となり, $n = 1$ のとき, 成り立つ.
$n = k$ のとき,

$$\begin{aligned}\frac{f_k(x)}{x-\alpha_l} =& \frac{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_k)}{(x-\alpha_l)} \\ =& a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_k)\end{aligned}$$

$x = \alpha_l$ とすると,

$$a(\alpha_l-\alpha_1)(\alpha_l-\alpha_2)\ldots(\alpha_l-\alpha_n) = f'(\alpha_l)$$

が成り立つと仮定する.
$n = k+1$ のとき,

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x) =& a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1}) \\ =& f_k(x)(x-\alpha_{k+1}) \\ f_{k+1}'(x) =& f_k'(x)(x-\alpha_{k+1}) + f_k(x) \\ f_{k+1}'(\alpha_l) =& f_k'(\alpha_l)(\alpha_l-\alpha_{k+1}) + f_k(\alpha_l) \\ =& f_k(\alpha_l)(\alpha_l-\alpha_{k+1}) \\ =& a(\alpha_l-\alpha_1)(\alpha_l-\alpha_2)\ldots(\alpha_l-\alpha_k)(\alpha_l-\alpha_{k+1})\end{aligned}$$

となり, $n = k+1$ のとき, 成り立つ.
より, 全ての自然数 n について成り立つ. QED .

方程式論において定理 5.3 の応用は広大である．方程式 $F(x)=0$ の根を $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n$, $\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n)$ をこれらの根の与えられた有理式とする．即ち φ なる式は既知で, $\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n)$ の値は未知である．さて $\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n$ から変数の置換によって i 個の相異なる有理式が生ずるならば, それらの対称式, 特に基本対称式は, 定理 5.3 によって $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n$ に関しても対称式であるから, 方程式 $F(x)=$ の係数から有理的 (四則によって) に求められる．ゆえに未知な $\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n$ を根とする i 次の方程式が得られる．この原則の応用によって, 次章で述べるように, 三次および四次方程式を解くことを得るのである．

また, $\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\ \ldots\ ,\varphi(x_n)$ を根とする n 次方程式 $G(y)=$ も対称式の計算によって求められる．即ち $i=n$ なる特別の場合である．これを応用して, 方程式 $F(x)0$ を変形することができる．φ なる有理式を適当に選んで, $G(y)$ をある条件に適させることが, その目的である．このような変形を Tschirnhausen の変形という．

特に方程式 $F(x)=$ の根の間に $\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n)=0$ という関係があるために必要かつ十分な条件は, φ から生ずる上の i 個の有理式の積である対称式 $S(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n)$ が 0 に等しいことである．この条件 $S=0$ も, 対称式の計算によって得られる．

2 方程式の解法

2.1 二次方程式の解法

2.1.1 平方完成

二次方程式,

$$x^2+ax+b=0$$

において,

$$\begin{aligned}
x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b&=0\\
\left(x+\frac{a}{2}\right)^2&=-b+\frac{a^2}{4}\\
x+\frac{a}{2}&=\pm\sqrt{-b+\frac{a^2}{4}}=\frac{\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}\\
x&=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}
\end{aligned}$$

となる．

2.1.2 Lagrange の解法

二次方程式

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{4}$$

(4) の解を x_1, x_2 とすると,
根と係数の関係より,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 x_2 = b. \end{cases} \tag{5}$$

が得られる.
ここで,

$$\begin{cases} u = x_1 - x_2 \end{cases}$$

とすると, (5) より

$$\begin{aligned} u^2 &= (x_1 - x_2)^2 . \\ u^2 &= (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \\ (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 &= a^2 - b \end{aligned}$$

これで, X^2 の二次方程式より

$$\begin{aligned} (X - u)(X + u) &= X^2 - u^2 = 0 \\ &= X^2 - u^2 \\ &= X^2 - (a^2 - 4b) \\ X = u &= \pm\sqrt{a^2 - 4b} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 - x_2 = u \end{cases}$$

を解くことで, x_1, x_2 が求まる.

2.2 三次方程式の解法

2.2.1 Cardano の公式

三次方程式,

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

において

$$x = y - \frac{a_1}{3}$$

とおいて, 未知数の一次変形をおこなえば, y に関する方程式において二次の項が消滅して次のような形になる.

$$\begin{aligned} y^3 + ay + b =& 0 \ , \\ a =& \frac{-1}{3}\left(a_1^2 - 3a_2\right) = f'\left(\frac{-a_1}{3}\right) \ , \\ b =& \frac{1}{27}\left(2a_1^3 - 9a_1 a_2 + 27a_3\right) = f\left(\frac{-a_1}{3}\right) \ . \end{aligned}$$

よって, 初めから方程式を簡約された形にとって

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{6}$$

を解くことにする.

$$x = u + v \ (u > v, \ u + v \neq 0) \tag{7}$$

とおいて, (6) に代入すれば

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) + b =& 0 \ , \\ u^3 + v^3 + b = 0, \ 3uv + a =& 0 \end{aligned}$$

から u, v 定めて, その値を (7) に代入すれば, x は (6) を満たす.
上の条件は

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ uv = \dfrac{-a}{3} \end{cases} \tag{8}$$

で, これから u^3, v^3 を根とする二次方程式を得る.
すなわち

$$t^2 + bt - \frac{a^3}{27} = 0 \tag{9}$$

である. これを三次方程式 (6) の分解方程式という.
(9) より

$$u^3 = \frac{-b}{2} + \sqrt{R} \ , \ v^3 = \frac{-b}{2} - \sqrt{R} \ , \ \left(R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right) \tag{10}$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{R}} \ , \ v = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{R}} \ . \tag{11}$$

(7) に代入して

$$x = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{R}} \ .$$

となり, $u,\ v$ は三乗根を開いて求めるのであるから, その値は各々三つあるが, (8) によって $u,\ v$ の積は一定であるから, $u,\ v$ のうち一つが定まれば, 他の一つは自ら定まる．すなわち

$$v = \frac{-a}{3u}\ .$$

いま $u,\ v$ はこの関係を満足する立方根 (6) の一組の値であるとすれば, ω を 1 の虚数立方根とするとき, u の他の二つの値は $\omega u,\ \omega^2 u$ で, それに対応する v の値は $\omega^2 v,\ \omega v$ である．よって (7) より

$$\begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = \omega u + \omega^2 v \\ x_3 = \omega^2 u + \omega v \end{cases} \tag{12}$$

公式 (12) において,1, $\omega,\ \omega^2$ および 1, $\omega^2,\ \omega$ を順次に掛けて加え

$$3u = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3\ ,\ 3v = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$$

を得る．

2.2.2 三角関数による解法

本節では, 三次方程式の係数を実数とする. この場合には三つの実根か, 一つの実根と二つの共役な虚根の場合に分かれる.
これら二つの場合は, 判別式 D の符号によって区別される. 根が三つとも実数ならば,

$$D = \{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\}^2 \geq 0$$

また, x_1 は実数, $x_2,\ x_3$ は共役複素数ならば, $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$ は共役な複素数の積であるから正である.
また $x_2 - x_3$ は純虚数, したがって $(x_2 - x_3)^2$ は負数であるから, $D < 0$.
さて方程式を簡単な形

$$x^3 + ax + b = 0$$

に変形したものとして見ると, 4.1 二次分解方程式 (原三次方程式) の場合 (43) の通り

$$R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-D}{4 \cdot 27}\ .$$

ゆえに $D < 0 \Rightarrow R > 0$ なので

$$u^3 = \frac{-b}{2} + \sqrt{R},\ v^3 = \frac{-b}{2} - \sqrt{R}$$

は実数である. よって $\frac{-b}{2} + \sqrt{R}$ の立方根の実数値を u とすれば

$$uv = \frac{-a}{3}$$

から, v も実根で

$$x_1 = u + v$$

は実根

$$x_2 = \omega u + \omega^2 v,\ x_3 = \omega^2 u + \omega v$$

はお互いに共役な虚根である.
次に $D = 0$ ならば, $R = 0$ なので

$$u = v = \sqrt[3]{\frac{-b}{2}}$$

$(x_1 u + v,\ x_2 = \omega u + \omega^2 v,\ x_2 = \omega^2 u + \omega v$ なので$)$

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt[3]{\dfrac{-b}{2}} \\ x_2 = (\omega + \omega^2)u = -\sqrt[3]{\dfrac{-b}{2}} \\ x_3 = (\omega^2 + \omega)v = -\sqrt[3]{\dfrac{-b}{2}} \end{cases}$$

そうゆうわけで $D > 0$ のときは, $R < 0$, したがって $u^3,\ v^3$ は共役な虚数で $u,\ v$ も $\omega u,\ \omega^2 v$ も $\omega^2 u,\ \omega v$ もお互いに共役になって, 三つの実根が Cardano の公式で共役複素数の和として表されている. これは Cardano の公式の欠点と見なされていて, 三つの実根を実数の開法によって得ようというのが問題になった. これは不還元の場合と呼ばれていて, 現在ではこの問題は不可能, つまり冪根で方程式の三つの実根を表すためには複素数の立方根を避けることができないことが知られている.
しかし, 開立の代わりに, 三角関数の三分法を用いるならば, 問題は容易に解決される.

$D > 0$ したがって $R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} < 0$ のときには, $a < 0$ でなければならない.
また

$$
\begin{aligned}
u^3 = \frac{-b}{2} + \sqrt{R} &= \frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{-D}{4 \cdot 27}} \\
&= \frac{-b}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{D}{27}} = r(\cos\theta + \sin\theta)
\end{aligned}
$$

とおくと, (de Moivre の定理より)

$$u = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sin\frac{\theta}{3}\right)$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_1 = u + v = \sqrt[3]{r}&\left\{\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right) + \left(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}\right)\right\} \\
= 2\sqrt[3]{r}&\cos\frac{\theta}{3} \\
x_2 = \omega u + \omega^2 v = \sqrt[3]{r}&\left\{\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right)\right. \\
&\left. + \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}\right)\right\} \\
&= 2\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\theta}{3}\right) \\
&= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta + 2\pi}{3} = -2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta - \pi}{3} \\
x_3 = \omega^2 u + \omega v = \sqrt[3]{r}&\left\{\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right)\right. \\
&\left. + \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}\right)\right\} \\
&= 2\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \\
&= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta + 4\pi}{3} = -2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta + \pi}{3}
\end{aligned}
\right.
\tag{13}
$$

ここで

$$uv = \left(\sqrt[3]{r}\right)\left(\cos^2\frac{\theta}{3} + \sin^2\frac{\theta}{3}\right) = \left(\sqrt[3]{r}\right)^2$$

であるから, $uv = \dfrac{-a}{3}$ $(a < 0 \Rightarrow \dfrac{-a}{3} > 0)$ より

$$\left(\sqrt[3]{r}\right)^2 = \frac{-a}{3} \tag{14}$$

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt{\frac{-a}{3}} \ (r > 0) \tag{15}$$

また

$$\cos\theta = \frac{-b}{2r} \tag{16}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2r}\sqrt{D27} \tag{17}$$

で平方根$\sqrt{\frac{D}{27}}$の正の値をとれば, $\sin\theta > 0$. よって $\pi > \theta \geq$ とすれば, θ は (17) から求められ, したがって (13) によって三つの根が得られるのである. $\sqrt[3]{r}$ は (15) から開平によって求められるから, この計算では開立は不要である. すなわち立方根を開くという計算の代わりに, $\cos\theta$ から $\cos\frac{\theta}{3}$, $\cos\frac{\theta+2\pi}{3}$, $\cos\frac{\theta-2\pi}{3}$ を求めるという問題, すなわち三角関数 cos の三分法に三次方程式の解法が還元されるのである.
立方根を求めることは, $x^3 - A = 0$ のような三次方程式を解くことで (それは虚数なしではできない), cos の三分法は cos を既知数, $x = \cos\frac{\theta}{3}$ などを未知数とすれば,

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

より,

$$4x^3 - 3x = \cos\theta \tag{18}$$

なる三次方程式を解くことである. すなわち $D > 0$ の場合の実三次方程式の解法が (開平によって $\cos\theta$ を求めた後), 三次方程式 (18) の解法に還元されるのである.

このような結論に到達した上で, 三つの実根をもつ三次方程式

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{19}$$

の解法を組み立てるならば, (19) において $x = \lambda x'$ とおいて, 未知数を変換し, λ を適当に選んで, (19) を (18) の形,

$$4x'^3 - 3x' - c = 0 \tag{20}$$

に変形することを試みる. この変換によって (19) は

$$\lambda^3 x'^3 + \lambda a x' + b = 0$$

$$\begin{cases} 4 = \lambda^3 \\ -3 = \lambda a \\ -c = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\lambda^3}{4} \\ 1 = \dfrac{-\lambda a}{3} \\ 1 = \dfrac{-b}{c} \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{\lambda^3}{4} = \frac{-\lambda a}{3} = \frac{-b}{c}$$

よって,

$$\lambda^2 = \frac{-4b}{3},\ \lambda = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}$$

したがって.

$$c = \frac{-4b}{\lambda^3} = \frac{\dfrac{-b}{2}}{\sqrt{\dfrac{-a^3}{27}}}$$

(19) が実根のみをもつ場合には, $\left|\dfrac{b^2}{4}\right| \leq \left|\dfrac{a^3}{27}\right|$ だから, $|c| \leq 1$. ゆえに $c = \cos\theta$ なる θ が求められる.
そうゆうわけで (20) から,

$$x' = \cos\frac{\theta}{3},\ \cos\frac{\theta + 2\pi}{3},\ \cos\frac{\theta + 4\pi}{3}$$

すなわち

$$x = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\ -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\theta - \pi}{3},\ -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\theta + \pi}{3}$$

となる.

2.2.3 Lagrange の解法

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{21}$$

(21) の解を x_1, x_2, x_3 とすると,
根と係数の関係より,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases} \tag{22}$$

が得られる．また,

$$\begin{aligned} \omega^3 =& 1 \\ \omega^3 - 1 =& (\omega - 1)\left(1 + \omega + \omega^2\right) \end{aligned}$$

$\omega \neq 1$ とすると,

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

なので, ここで,

$$\begin{cases} u = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \\ v = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \end{cases} \tag{23}$$

とすると,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -2a^2 + 9ab - 27c \\ u^3v^3 = a^2 - 3b \end{cases} \tag{24}$$

これで, X^3 の二次方程式より u, v が求まるから, 三連立方程式,

$$\begin{cases} -a = x_1 + x_2 + x_3 \\ X_1 = u = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \\ X_2 = v = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \end{cases}$$

を解くことで, x_1, x_2, x_3 が求まる．

X^3 の二次方程式が重解となったとき,

$$\begin{aligned} u &= v \\ \omega x_2 + \omega^2 x_3 &= \omega^2 x_2 + \omega x_3 \\ (\omega - \omega^2)x_2 + (\omega^2 - \omega)x_3 &= 0 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{cases} -a = x_1 + 2x_2 \\ X_1 = X_2 = u = v = x_1 - x_2 \end{cases}$$

となるので, x_1, x_2, x_3 が求まる．

2.3 四次方程式の解法

2.3.1 Ferrari の公式

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

においても,

$$y = x + \frac{a_1}{4}$$

を未知数とすれば三次の項は消失する. よって,

$$x^4 + px\ 2 + qx + r = 0$$

を考える. 即ち,

$$x^4 = -px^2 - qx - r$$

両辺に $yx^2 + \dfrac{y^2}{4}$ を加えると, 左辺は平方の形になって,

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 = (y-p)\,x^2 - qx + \left(\frac{y^2}{4} - r\right) \ . \tag{25}$$

右辺が x に関する完全な平方になるには,

$$q^2 - 4\,(y-p)\left(\frac{y^2}{4} - r\right) = 0 \ .$$

であればよく, これは y に関する三次方程式である. つまり,

$$y^3 - py^2 - 4ry + \left(4pr - q^2\right) = 0 \ . \tag{26}$$

これを解いて, その一つの根を (25) に代入すれば,

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 = (y-p)\left(x - \frac{q}{2\,(y-p)}\right)^2 \ .$$

よって,

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{y}{2} = +\sqrt{y-p}\left(x - \dfrac{q}{2\,(y-p)}\right) \ , \\ x^2 + \dfrac{y}{2} = -\sqrt{y-p}\left(x - \dfrac{q}{2\,(y-p)}\right) \ . \end{cases} \tag{27}$$

これらの二次方程式を解いて x の四つの解を得る. 方程式 (26) を原四次方程式の三次分解方程式という. (27, 27) の根をそれぞれ x_1, x_2, x_3, x_4 とすれば,

$$x_1 + x_2 = +\sqrt{y-p} \ , \ x_1 x_2 = \frac{y}{2} + \frac{q}{2\sqrt{y-p}} \ .$$
$$x_3 + x_4 = -\sqrt{y-p} \ , \ x_3 x_4 = \frac{y}{2} - \frac{q}{2\sqrt{y-p}} \ .$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_3x_4 =& y \ , \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 =& 2\sqrt{y-p} \end{aligned}$$

これが分解方程式 (9) の根と四次方程式の根との関係である.

2.3.2 Euler の公式

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{28}$$

は, Cardano の公式と同じ方法で解けることを Euler が示した. 即ち,

$$x = u + v + w \tag{29}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} x^2 =& u^2 + v^2 + w^2 + 2\left(uv + uw + vw\right) \ . \\ x^4 =& \left(u^2 + v^2 + w^2\right)^2 + 4\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\left(uv + uw + vw\right) \\ &+ 4\left(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2\right) + 8uvw\left(u + v + w\right). \end{aligned}$$

これらを (28) に代入すれば,

$$\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + 4\left(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2\right) + p\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + \left(8uvw + q\right)\left(u + v + w\right) + r = 0$$

ゆえに (28) は,

$$\begin{aligned} 2\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + p = 0, 8uvw + q = 0, \\ \left(u^2 + v^2 + w^2\right)^2 + 4\left(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2\right) + p\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + r = 0 \end{aligned}$$

であるときに満足させる. $(u + v + w \neq 0, uv + uw + vw \neq 0)$ とした.
または, 第一の等式を用いて, 第三の等式を簡単にして,

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = \dfrac{-p}{2} \ , \\ uvw = \dfrac{-q}{8} \ , \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \dfrac{p^2}{16} - \dfrac{r}{4} \ . \end{cases} \tag{30}$$

すなわち, $u^2,\ v^2,\ w^2$ が三次方程式

$$t^3 + \frac{p}{2}t^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)t - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0 \ , \tag{31}$$

$$(4t)^3 + 2p\,(4t)^2 + \left(p^2 - 4r\right)(4t) - q^2 = 0. \tag{32}$$

の解であればよい. この三つの解を $t_1,\ t_2,\ t_3$, とすれば,

$$u = \pm\sqrt{t_1},\ v = \pm\sqrt{t_2},\ w = \pm\sqrt{t_3}.$$

ただし, (30) の第二の等式によって, $uvw = \dfrac{-q}{8}$ としなければならないから, 平方根の符号は, 三つのうち二つを任意にとれば, 他の一つは自然に定まる.

その一組を$\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_3}$ とすれば, その他の組とともに, それらの値を (29) に入れると,

$$
\begin{cases}
x_1 = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}, \\
x_2 = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}, \\
x_3 = -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}, \\
x_4 = -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}.
\end{cases}
$$

これが四次方程式 (28) の四つの根である.
これらの根の値から,

$$
\begin{cases}
\sqrt{t_1} = x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \\
\sqrt{t_1} = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\
\sqrt{t_1} = x_1 - x_2 - x_3 + x_4.
\end{cases}
$$

従って,

$$
\begin{cases}
16u^2 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \ , \\
16v^2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \ , \\
16w^2 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 \ .
\end{cases}
$$

を得る. これが分解方程式 (32) の三つの根と原四次方程式の根と係数の関係である.

2.3.3 Lagrange の解法

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{33}$$

(33) の解を x_1, x_2, x_3, x_4 とすると,
根と係数の関係より,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b, \\ x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3 = -c, \\ x_1x_2x_3x_4 = d \end{cases} \tag{34}$$

が得られる. ここで,

$$\begin{cases} u = (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4) \\ v = (x_1 + x_3) - (x_2 + x_4) \\ w = (x_1 + x_4) - (x_2 + x_3) \end{cases} \tag{35}$$

とすると,

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = 3a^2 - 8b \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = 3a^4 - 8a^2b - 16b^2 + 16ac - 64d \\ uvw = 2a(-a^3 + 3ab - 3c) \end{cases} \tag{36}$$

これで, X の三次の分解方程式より u^2, v^2, w^2 は,

$$X^3 - (u^2 + v^2 + w^2)X^2 + (u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)X - uvw = 0$$

の根である. この方程式の三つの根を X_1, X_2, X_3 とすると,

$$\begin{cases} u = \pm\sqrt{X_1} \\ v = \pm\sqrt{X_2} \\ w = \pm\sqrt{X_3} \end{cases}$$

となり, 四連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a, \\ (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4) = u, \\ (x_1 + x_3) - (x_2 + x_4) = v, \\ (x_1 + x_4) - (x_2 + x_3) = w. \end{cases} \tag{37}$$

を解くことで, x_1, x_2, x_3, x_4 が求まる.

3 分解式の作り方

3.1 三次の場合

このままだと, 分解式を $x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$ とおいたことは, 天来の妙手としか言いようがないということになってしまうので, これの由来を説明する. 分解式とは, ある方程式を解く手段として用いられる原方程式の根で表された式である.
いま三次方程式,

$$f(x)=0$$

の根 $x_1,\ x_2,\ x_3$ の有理式を $\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)$ とし, φ から三つの根の置換によって生ずる六つの有理式を $\varphi,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_5$ とし, これらが相異なる式であるように φ を選んだものとする (上の u はその一例である). それならば定理 5.2 によってこれらの六つの有理式は $x_1,\ x_2,\ x_3$ の対称式を係数とする六次方程式の根である. その方程式を

$$X^6+A_1X^5+\ \ldots\ +A_6=0 \tag{38}$$

とすれば, 係数 $A_1,\ A_2,\ \ldots\ ,A_6$ は方程式 (33) の係数によって有理的に表し得る既知数である. さて定理 5.3 によって $x_1,\ x_2,\ x_3$ の任意の有理式, したがって特に $x_1,\ x_2,\ x_3$ それ自身が φ に関する有理式として計算される (φ の代わりに $\varphi,\ \varphi_1,\ \ldots\ ,\varphi_5$ のうちのどれを用いることにしても同様). すなわち $x_1,\ x_2,\ x_3$ が知れたならば, $\varphi,\ \varphi_1,\ \ldots\ ,\varphi_5$ はもちろん有理的に求められるが, 逆に $\varphi,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_5$ のうちの一つだけが知れたならば, $x_1,\ x_2,\ x_3$ が有理的に計算されるから, 方程式 (33) の三つの根を求めるのも, 方程式 (38) の一つの根を求めるのもつまり同一の問題と見ることができる. このように三次方程式 (33) の解法を六次方程式 (38) の解法に帰着させることは, 方程式の次数にこだわれば, かえって問題を複雑ならしめるかに見えるけれども, 実は方程式 (38) は特別な六次方程式で, すなわちその根の一つが知れたときに, 他の根がすべて有理的に求められるのであるから, 単に次数の高低のみによって方程式の難易を判定することはできないのである.

方程式 (38) の根の中の一つによって, 他のものが有理的に表されることに基づいて, 三次方程式の解法の中に表される著明な一つの事実が最も明瞭に説明される. 前節において用いた分解式では uv の積が $x_1,\ x_2,\ x_3$ の対称式に等しく, したがって u によって v が有理的に表されたのであるが, それが偶然の事情であるかに見えたのである. それならば上のように考えると, u が v の有理式として表されることは当然であって, ただそれが $uv = B$ のようになることが, u の特別なる選定の結果として生じたにすぎないのである.

さて六次方程式 (38) であるが, もし φ を適当に選ぶことによって (38) が

$$X^6 + A_3X^3 + A_6 = 0 \tag{39}$$

のような形になるならば, それは X^3 に関する二次方程式であるから, φ^3 を求め, 次に立方根を開いて φ を求めることができる. φ が (39) の根であるときには, $\omega\varphi,\ \omega^2\varphi$ がやはり (39) を満足するから, φ は $x_1,\ x_2,\ x_3$ の置換によって $\omega\varphi,\ \omega^2\varphi$ にならなければならない. またそのような置換は (1 2 3), (1 2 3) でなければならない. ($\varphi|(1\ 2) = C \cdot \varphi$ ならば, $C^2 = 1$ であるから). このような φ をなるべく簡単に求めるために φ を $x_1,\ x_2,\ x_3$ の一次式として

$$\varphi = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$

と置いて見れば, 条件は

$$C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = \omega(C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3)$$

すなわち

$$C_3 = \omega C_1,\ C_1 = \omega C_2,\ C_2 = \omega C_3$$

あるいは

$$C_1 : C_2 : C_3 = 1 : \omega : \omega^2$$

よって $C_1 = 1$ とすれば

$$\varphi = x_1 + \omega^2x_2 + \omega x_3$$

ですなわち分解式の置き方の根拠が明白になったのである.

3.2 四次の場合

四次の場合, 根が四つあるので四つのものをうまいこと三通りに分けられないかと考えると, 二対に分ける分け方は三通りあることがわかる．すなわち

$$12|34,\ 13|24,\ 14|23\ .$$

よって四つの根 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の有理式で, 根の置換によってただ三つの相異なる形を生ずるものをつくることができる．, 最も手近なのは

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4,\ y_2 = x_1x_3 + x_2x_4,\ y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$$

で, $y_1,\ y_2,\ y_3$ の対称式は $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ に関しても対称であるから, 四次方程式の係数から有理的にその値を求めることができる．したがって $y_1,\ y_2,\ y_3$ は三次の分解方程式の根である．

しかし, これでは $y_1,\ y_2,\ y_3$ を求めた後, $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ を求めるのに苦労するため最も簡単に $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ を求めることができそうなものはないか (一次式でないか) と考えると, $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の一次式でこのような性質をもつものはないが

$$\begin{cases} u_1 = (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)\ (= u)\ , \\ u_2 = (x_1 + x_3) - (x_2 + x_4)\ (= v)\ , \\ u_3 = (x_1 + x_4) - (x_2 + x_3)\ (= w)\ . \end{cases}$$

とすれば, これらからは根の置換によって $-u_1,\ -u_2,\ -u_3$ をも生ずるが

$$u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2$$

は上の $y_1,\ y_2,\ y_3$ と同様の性質をもつ．すなわち, $u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2$ の対称式は $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の対称式であって, 特に $u_1u_2u_3$ はそれ自身ですでに x に関する対称式である．そこで

$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = A\ , \\ u_1^2u_2^2 + u_1^2u_3^2 + u_2^2u_3^2 = B\ , \\ u_1^2u_2^2u_3^2 = C\ . \end{cases} \tag{40}$$

とおけば, $u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2$ は三次の分解方程式

$$t^3 - At^2 + Bt - C^2 = 0 \tag{41}$$

の根である．この方程式の三つの根を $t_1,\ t_2,\ t_3$ とすれば,

$$u_1 = \pm\sqrt{t_1},\ u_2 = \pm\sqrt{t_2},\ u_3 = \pm\sqrt{t_3}$$

で平方根の値は (40) に適合するように定めるべきである．

4　分解方程式の計算

4.1　二次分解方程式 (原三次方程式) の場合

前節の説明によって三次方程式の解法において二次分解方程式が出て来る理由が明らかになった. さて二次分解方程式の係数を三次方程式の根の対称式として計算するにあたって, 本節では三次方程式を

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{42}$$

とし, 根を $x_1,\ x_2,\ x_3$ とすると, 根と係数の関係を用いて,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2b\ .$$

$$\begin{aligned}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 &= x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2(x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2)\\ x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 &= b^2 - 2(-c)(-a) = b^2 - 2ac\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) &= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2x_3\\ &+ x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3\\ &+ x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2\\ x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 &= -ab - 3(x_1x_2x_3) = 3c - ab\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) &= x_2^3x_3^3 + x_1^3x_2^2x_3 + x_1^2x_2^3x_3\\ &+ x_1^3x_2x_3^2 + x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2^3x_3\\ &+ x_1x_2^3x_3^2 + x_1x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^3\\ x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3 &= -x_1x_2x_3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2)\\ &+ b(b^2 - 2ac)\\ &= c(3c - ab) + b^3 - 2abc\\ &= b^3 + 3c(c - ab)\ .\end{aligned}$$

となるので,
分解方程式の係数は, それぞれ

$$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2) = (2x_1 - x_2 - x_3)(u^2 - uv + v^2)$$

となり, $u^3 + v^3$ は $2x_1 - x_2 - x_3$ という因数をもつので, 対称の理由によって

$$\begin{aligned}u^3 + v^3 &= (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)\\ &= (3x_1 + a)(3x_2 + a)(3x_3 + a)\\ &= 27x_1x_2x_3 + 9a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 3a^2(x_1 + x_2 + x_3) + a^3\\ &= -27c + 9ab - 2a^3\ ,\\ uv &= (x_1 + \omega x_2\omega^2x^3)(x_1 + \omega^2x_2\omega x^3)\\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \omega(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + \omega^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x^3)\\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\\ &= a^2 - 2b - b = a^2 - 3b\end{aligned}$$

となる.

次に判別式 D の計算を求める．さらに, 三次方程式の解法の判別式を用いる部分の説明が明らかに不十分だったので, 合わせて解説する．(42) の判別式は

$$
\begin{aligned}
D &= \{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\}^2 \\
&= \{x_1x_2(x_1-x_2)+x_2x_3(x_2-x_3)+x_1x_3(x_1-x_3)\}^2 \\
&= x_1^2x_2^2(x_1-x_2)^2+2x_1x_2^2x_3(x_1-x_2)(x_2-x_3) \\
&+ x_2^2x_3^2(x_2-x_3)^2+2x_1x_2x_3^2(x_2-x_3)(x_3-x_1) \\
&+ x_1^2x_3^2(x_3-x_1)^2+2x_1^2x_2x_3(x_3-x_1)(x_1-x_2)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\alpha &= x_1^2x_2^2(x_1-x_2)^2+x_2^2x_3^2(x_2-x_3)^2+x_1^2x_3^2(x_3-x_1)^2 \ , \\
\beta &= x_1x_2^2x_3(x_1-x_2)(x_2-x_3)+x_1x_2x_3^2(x_2-x_3)(x_3-x_1)+x_1^2x_2x_3(x_3-x_1)(x_1-x_2)
\end{aligned}
$$

とすると

$$
\begin{aligned}
\alpha &= x_1^2x_2^2(a^2-2b-x_3^2-2x_1x_2)+x_2^2x_3^2(a^2-2b-x_1^2-2x_2x_3)+x_1^2x_3^2(a^2-2b-x_2^2-2x_1x_3) \\
&= (a^2-2b)(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2)-3x_1^2x_2^2x_3^2-2(x_1^3x_2^3+x_2^3x_3^3+x_1^3x_3^3) \\
&= (a^2-2b)(b^2-2ac)-3c^2-2\{b^3+3c(c-ab)\} \\
&= a^2b^2-2a^3c-4b^3-9c^2+10abc \ , \\
\beta &= x_1x_2x_3\{x_2(x_1-x_2)(x_2-x_3)+x_3(x_2-x_3)(x_3-x_1)+x_1(x_3-x_1)(x_1-x_2)\} \\
\frac{\beta}{-c} &= x_2\{x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3+x_1^2+x_3^2+(2b-a^2)\} \\
&+ x_3\{x_2x_3-x_1x_2+x_1x_3+x_1^2+x_2^2+(2b-a^2)\} \\
&+ x_1\{x_1x_3-x_2x_3+x_1x_2+x_2^2+x_3^2+(2b-a^2)\} \\
&= 2(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2)-3x_1x_2x_3+(2b-a^2)(x_1+x_2+x_3) \\
&= 2(3c-ab)+3c+(2b-a^2)(-a) = 9c-4ab+a^3 \\
\beta &= -9c^2+4abc-a^3c
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
D &= \alpha+2\beta \\
&= a^2b^2+18abc-4b^3-4a^3c-27c^2
\end{aligned}
$$

となる．また

$$x^3+ax+b=0$$

の判別式を計算すると

$$D' = -4a^3-27b^2 \tag{43}$$

となる．

4.2 三次分解方程式 (原四次方程式) の場合

前節の説明によって四次方程式の解法において三次分解方程式が出て来る理由が明らかになった. さて三次分解方程式の係数を四次方程式の根の対称式として計算するに当たって, 本節では 四次方程式を,

$$f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0 \tag{44}$$

の形におく. y_1, y_2, y_3 および u_1, u_2, u_3 の意味は前の通り. さて

$$\begin{aligned}
u_1 &= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4(y_2 + y_3) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4(y_1 + y_2 + y_3) + 4y_1 \\
&= \frac{16a_1}{a_0^2} - \frac{24a_2}{a_0} + 4y_1
\end{aligned}$$

なる関係があるから, u^2 または y に関する分解方程式の中で, 一方が計算されたときに, それから他の一つを導くことができる. しかし本節では三次分解方程式を簡単な形に出すために

$$(y_1 + y_2 + y_3) - 3y = \frac{6a_2}{a_0} - 3y_1$$

などを根とする方程式を求める. そうすれば, 三つの根の和が 0 になるから, 第二項の欠けた三次分解方程式を得るのである.
いま計算の便宜上

$$\begin{cases}
e_1 = \dfrac{1}{4}(2a_2 - a_0y_1) = \dfrac{a_0}{12}(y_2 + y_3 - 2y_1)\ , \\
e_2 = \dfrac{1}{4}(2a_2 - a_0y_2) = \dfrac{a_0}{12}(y_1 + y_3 - 2y_2)\ , \\
e_3 = \dfrac{1}{4}(2a_2 - a_0y_3) = \dfrac{a_0}{12}(y_1 + y_2 - 2y_3)\ .
\end{cases}$$

とすれば,

$$e_1 = \frac{a_0}{12}\{(y_3 - y_1) - (y_1 - y_2)\}$$

などで, また,

$$\begin{aligned}
y_2 - y_3 &= x_1x_3 + x_2x_4 - x_1x_4 - x_2x_3 \\
&= (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)
\end{aligned}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 に置換 (234) を行うとき, y_1, y_2, y_3 の間に間に置換 (123) が生ずるから, いま

$$\begin{cases}
v_1 = a_0(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)\ (= a_0(y_2 - y_3)\ , \\
v_2 = a_0(x_1 - x_3)(x_4 - x_2)\ (= a_0(y_3 - y_1)\ , \\
v_3 = a_0(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)\ (= a_0(y_1 - y_2)\ .
\end{cases} \tag{45}$$

とおけば

$$\begin{cases}
e_1 = \frac{1}{12}(v_2 - v_3)\ , \\
e_2 = \frac{1}{12}(v_3 - v_1)\ , \\
e_3 = \frac{1}{12}(v_1 - v_2)\ .
\end{cases} \tag{46}$$

(45) から

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \tag{47}$$

したがって

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = -2(v_1v_2 + v_3v_1 + v_2v_3) \tag{48}$$

左辺は明らかに $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の対称式である．それを

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 24y_2 \tag{49}$$

とおく．$(v_1v_2v_3)^2$ は (45) から見える通り, 四次方程式の判別式である．よって

$$v_1v_2v_3 = 16\sqrt{\Delta} \tag{50}$$

とする．すなわち (44) の判別式を 256 と置くのであるが, 256 はのちに至って計算の結果, 判別式から出てくる数値係数で, このような数値係数が出てくるために判別式が簡単になるのは, (44) のように四次方程式の係数を二項係数のかかった形にしておくからである．(47)(48)(49)(50) から, $v_1,\ v_2,\ v_3$ を根とする三次方程式を得る．すなわち

$$v^3 - 12g_2v - 16\sqrt{\Delta} = 0 \tag{51}$$

$v_1a_0(x_1-x_2)(x_3-x_4)$ からは, $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の置換によって $\pm v_1,\ \pm v_2,\ \pm v_3$ の六つの異なる式が生ずるから, (51) の係数は四次方程式の係数によって有理的に表されないで, $\sqrt{\Delta}$ のような無理数が現れるのである．しかるに $v_1,\ v_2,\ v_3$ の交代式は, (46) からも見えるように, かえって $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の対称式である．よって,

$$(v_1-v_2)(v_3-v_1)(v_2-v_3) = 432g_3 \tag{52}$$

とおいて, 三次方程式 (51) の判別式を計算すれば, ()

$$(432y_3)^2 = -4(12y_2)^3 = 27(16\sqrt{|\Delta})^2$$

すなわち

$$\Delta = y_2^3 - 27y3^2 \tag{53}$$

これによって四次方程式の判別式 Δ の計算は, 対称式 $y_2,\ y_3$ の計算に帰する．
さて, $e_1,\ e_2,\ e_3$ を根とする三次分解方程式であるが

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

であるから,

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = -2(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3)$$

そうすれば, (46) によって,

$$\begin{aligned} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 &= \frac{1}{144}\{(v_2-v_3)^2 + (v_3-v_1)^2 + (v_1-v_2)^2\}\ , \\ &= \frac{1}{144}\{2\sum_{k=1}^{3} v_k^2 - 2(v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3)\}\ , \\ &= \frac{1}{144} \times 3\sum_{k=1}^{3} v_k^2 = \frac{1}{48}\sum_{k=1}^{3} v_k^2 = \frac{y_2}{2}\ . \end{aligned}$$

ゆえに

$$e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = \frac{-y_2}{4}$$

また (46), (52) から

$$e_1e_2e_3 = \frac{1}{12^3}432y_3 = \frac{y_3}{4}$$

ゆえに求めるところの三次方程式は

$$4e^3 - y_2e - y_3 = 0 \tag{54}$$

である.

2.3.1Ferrari の解法によれば三次分解方程式の根を用いて, 四次方程式が二つの二次方程式に分割される. いま e_1 を用いるならば, この解法は次のようになる.

$$f(x) = a_0(x^2 + 2px + q)(x^2 + p'x + q')$$

とおいて, 各二次因数の根を $x_1,\ x_2$ および $x_3,\ x_4$ とすれば, (44) との係数比較から

$$a_0(p + p') = 2a_1\ , \tag{55}$$

$$a_0(4pp' + q + q') = 6a_2\ , \tag{56}$$

$$a_0(pq' + p'q) = 2a_3\ , \tag{57}$$

$$a_0qq' = a_4\ . \tag{58}$$

また

$$q + q' = x_1x_2 + x_3x_4$$

から

$$a_0(q + q') = 2(a_2 - 2e_1) \tag{59}$$

ゆえに (57) から

$$a_0pp' = 2(a_2 - 2e_1) \tag{60}$$

(56), (60) によって, $p + p'$ と pp' とが知られているから, 二次方程式の解法によって四つの根が求められる. しかしながら, もしも三次分解方程式の他の根 e_2 をも用いるならば, 同様の方法で

$$f(x) = a_0(x^2 + 2p_1x + q_1)(x^2 + p_1x + q')$$

のような分解を行うことができる. これらの各因数の根を x_1, x_3 および $x_2,\ x_4$ とすれば, x_1 は $x^2+2px+q = 0$ と $x^2 + 2p_1x + q = 0$ との共通根として, 最大公約数の計算によって有利的に求められる. 同様に, 二次因数の他の組合せから $x_2,\ x_3,\ x_4$ が得られる.

上の四次式の分解を利用すれば, $g_2,\ g_3$ の式が容易に見出される. $g_2,\ g_3$ を四つの根として表す式は, (49) と (52) とに示してある.

5　五次方程式の解法

そもそも

- 多項式とは,
  一つの変数については,
  $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$$
  のような式のこと. ここで, $a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,a_n$ は定数 $(a_0 \neq 0)$, x は変数とし, $a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,a_n$ と x は複素数とする.

- 多項式を解くとは,
  任意の多項式が与えられたとき, $=0$ を満たす x を探しだすこと. また任意の n 次式が一般的に解く方法を解法という.

- 代数的解法とは,
  多項式の解法のうち, 四則演算と開法 (両辺の肩に実数をのせる) のみを使った解法のこと.

五次以上の方程式は代数的解法がないことが知られている.

6　補遺

この補遺は, 僕が芝祭でまとめ, 配布していたこの資料にはない. 芝祭の後, 現部長から手直しの機会をいただいたおかげで書くことができた.

前にも書いたとおり, 五次以上の方程式は, 代数的に解くことはできない. それを証明するためには群論によって, 四則と累乗によってどんな数がつくれるか, そしてどんな数が方程式の根となりえるかを考えなければならない.

このことは, この資料をまとえるうちに知ることができたが (これでポスターに書いた僕の疑問は解決したが), せめて, 「五次方程式は代数的に解くことはできない. 」ことだけでも今までの知識でほのめかせないものかと考えた. よって, それを今からやってみようと思う.

5 という数は奇数なので, 同じ奇数である 3 のときの方法を試みる. 4 のときも, 同じ偶数である 2 の方法を参考にしていたからである. つまり, $5! = 120$ 次方程式の根として $x_1, x_2 \ldots, x_5$ を用いた有理式 $\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5$ を考える. この 120 次方程式を 2, 3, 4 次方程式 (ここまでの流れから, 4 が本命だが, そうなったら良いということで, 2, 3 も考える) として扱うためには, それぞれ, $t_2^{60} = 1,\ t_3^{40} = 1,\ t_4^{30} = 1$ を考えて,

$$\begin{cases} X^{120} + a_{60}X^{60} + a_{120} = 0 \\ X^{120} + a_{40}X^{80} + a_{80}X^{40} + a_{120} = 0 \\ X^{120} + a_{30}X^{90} + a_{30}X^{90} + a_{60}X_{60} + a_{90}X^{30} + a_{120} = 0 \end{cases}$$

次に,

$$\varphi = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 = p(c_2x_1 + c_3x_2 + c_4x_3 + c_5x_4 + c_1x_5)$$
$$c_1 = pc_2,\ c_2 = pc_3,\ c_3 = pc_4,\ c_4 = pc_5,\ c_5 = pc_1$$

を考え, $c_1 = 1$ とすると,

$$c_1 : c_2 : c_3 : c_4 : c_5 = 1 : p^4 : p^3 : p^2 : p$$

となる.

$t_2^{60}=1\ (t_2\neq 0)$ のとき,

$$c_1:c_2:c_3:c_4:c_5=1:t_2^{48}:t_2^{36}:t_2^{24}:t_2^{12}$$

より,

$$\varphi=x_1+t_2^{48}x_2+t_2^{36}x_3+t_2^{24}x_4+t_2^{12}x_5.$$

$$(12)\varphi=x_2+t_2^{48}x_1+t_2^{36}x_3+t_2^{24}x_4+t_2^{12}x_5\ ,\ t_2^{12}(12)\varphi=x_1+t_2^{12}x_2+t_2^{48}x_3+t_2^{36}x_4+t_2^{24}x_5.$$

$$(13)\varphi=x_3+t_2^{48}x_2+t_2^{36}x_1+t_2^{24}x_4+t_2^{12}x_5\ ,\ t_2^{24}(13)\varphi=x_1+t_2^{12}x_2+t_2^{24}x_3+t_2^{48}x_4+t_2^{36}x_5\ ,$$
$$t_2^{12}(13)\varphi=x_2+t_2^{48}x_1+t_2^{12}x_3+t_2^{36}x_4+t_2^{24}x_5.$$

$$(14)\varphi=x_4+t_2^{48}x_2+t_2^{36}x_3+t_2^{24}x_1+t_2^{12}x_5\ ,\ t_2^{36}(14)\varphi=x_1+t_2^{24}x_2+t_2^{12}x_3+t_2^{36}x_4+t_2^{48}x_5\ ,$$
$$t_2^{12}(14)\varphi=x_2+t_2^{36}x_1+t_2^{48}x_3+t_2^{12}x_4+t_2^{24}x_5\ ,\ t_2^{24}(14)\varphi=x_3+t_2^{48}x_1+t_2^{12}x_2+t_2^{24}x_4+t_2^{36}x_5.$$

$$(15)\varphi=x_5+t_2^{48}x_2+t_2^{36}x_3+t_2^{24}x_4+t_2^{12}x_1\ ,\ t_2^{48}(15)\varphi=x_1+t_2^{36}x_2+t_2^{24}x_3+t_2^{12}x_4+t_2^{48}x_5\ ,$$
$$t_2^{12}(15)\varphi=x_2+t_2^{24}x_1+t_2^{48}x_3+t_2^{36}x_4+t_2^{12}x_5\ ,\ t_2^{24}(15)\varphi=x_3+t_2^{36}x_1+t_2^{12}x_2+t_2^{48}x_4+t_2^{24}x_5\ ,$$
$$t_2^{36}(15)\varphi=x_4+t_2^{48}x_1+t_2^{24}x_2+t_2^{12}x_3+t_2^{36}x_5\ .$$

$t_3^{40}=1\ (t_3\neq 0)$ のとき,
同様に,

$$c_1:c_2:c_3:c_4:c_5=1:t_3^{32}:t_3^{24}:t_3^{16}:t_3^{8}$$

より,

$$\varphi=x_1+t_3^{32}x_2+t_3^{24}x_3+t_3^{16}x_4+t_3^{8}x_5.$$

$$(12)\varphi=x_2+t_3^{32}x_1+t_3^{24}x_3+t_3^{16}x_4+t_3^{8}x_5\ ,\ \ t_3^{8}(12)\varphi=x_1+t_3^{8}x_2+t_3^{32}x_3+\dots\ .$$

$$(13)\varphi=x_3+t_3^{32}x_2+t_3^{24}x_1+t_3^{16}x_4+t_3^{8}x_5\ ,\ t_3^{16}(13)\varphi=x_1+t_3^{8}x_2+t_3^{16}x_3+\dots\ ,$$
$$t_3^{8}(13)\varphi=x_2+t_3^{32}x_1+t_3^{8}x_3+\dots\ .$$

$$(14)\varphi=x_4+t_3^{32}x_2+t_3^{24}x_3+t_3^{16}x_1+t_3^{8}x_5\ ,\ t_3^{24}(14)\varphi=x_1+t_3^{16}x_2+\dots\ ,$$
$$t_3^{8}(14)\varphi=x_2+t_3^{24}x_1+\dots\qquad ,\ t_3^{16}(14)\varphi=x_3+t_3^{8}x_2+\dots\ .$$

$$(15)\varphi=x_5+t_3^{32}x_2+t_3^{24}x_3+t_3^{16}x_4+t_3^{8}x_1\ ,\ t_3^{32}(15)\varphi=x_1+t_3^{24}x_2+\dots\ ,$$
$$t_3^{8}(15)\varphi=x_2+t_3^{16}x_1+\dots\qquad ,\ t_3^{16}(15)\varphi=x_3+t_3^{12}x_2+\dots\ ,$$
$$t_3^{24}(15)\varphi=x_4+t_3^{16}x_2\dots\ .$$

$t_4^{30}=1$ $(t_4 \neq 0)$ のとき,
同様に,

$$c_1 : c_2 : c_3 : c_4 : c_5 = 1 : t_4^{24} : t_4^{18} : t_4^{12} : t_4^{6}$$

より,

$$\varphi = x_1 + t_4^{24}x_2 + t_4^{18}x_3 + t_4^{12}x_4 + t_4^{6}x_5.$$

$$(12)\varphi = x_2 + t_4^{24}x_1 + t_4^{18}x_3 + t_4^{12}x_4 + t_4^{6}x_5 \ , \ \ t_4^{6}(12)\varphi = x_1 + t_4^{6}x_2 + t_4^{24}x_3 + \dots \ .$$

$$(13)\varphi = x_3 + t_4^{24}x_2 + t_4^{18}x_1 + t_4^{12}x_4 + t_4^{6}x_5 \ , \ t_4^{12}(13)\varphi = x_1 + t_4^{6}x_2 + t_4^{12}x_3 + \dots \ ,$$
$$t_4^{6}(13)\varphi = x_2 + t_4^{24}x_1 + t_4^{6}x_3 + \dots \ .$$

$$(14)\varphi = x_4 + t_4^{24}x_2 + t_4^{18}x_3 + t_4^{12}x_1 + t_4^{6}x_5 \ , \ t_4^{18}(14)\varphi = x_1 + t_4^{12}x_2 + \dots \ ,$$
$$t_4^{6}(14)\varphi = x_2 + t_4^{18}x_1 + \dots \qquad , \ t_4^{12}(14)\varphi = x_3 + t_4^{6}x_2 + t_4^{24}x_1 + \dots \ .$$

$$(15)\varphi = x_5 + t_4^{24}x_2 + t_4^{18}x_3 + t_4^{12}x_4 + t_4^{6}x_1 \ , \ t_4^{24}(15)\varphi = x_1 + t_4^{18}x_2 + \dots \ ,$$
$$t_4^{6}(15)\varphi = x_2 + t_4^{12}x_1 + \dots \qquad , \ t_4^{12}(15)\varphi = x_3 + t_4^{6}x_2 + t_4^{18}x_1 + \dots \ ,$$
$$t_4^{18}(15)\varphi = x_4 + t_4^{12}x_2 \dots \ .$$

となり, t_2^{12}, t_3^{8}, t_4^{6} の冪乗をかけても, 4 つ以下の有理式に戻ることがないので, 上の三つは分解式として不適当である.

同じことを三度繰り返したが, これで五次方程式で分解式をつくることを五つの根という構造そのものが, 妨げていることをはっきりと示せたと思う.

7 参考文献

[1] 高木貞治:代数学講義, 改訂新版 2012 年 05 月 01 日, 共立出版.

[2] 代数学 IA 演習 (担当: 天野勝利),
amano-katsutoshi.com/lec2009-1/algebraIA-ex/algebraIA-ex20091016.pdf,
平成 27 年 10 月 23 日最終アクセス.