ゲーム理論を学ぶ
二人零和ゲームの基礎

数理科学研究会　小池　智人

11 月 6 日

目次

1　はじめに

私はテーブル (ボード) ゲームが好きである. それは他者同士の対戦を観戦するの然り, 個人でプレイするのも然りである. 現代の人々はゲームと聞くと TV ゲームを思い浮かべるであろうが, 長い歴史と文化を持つテーブル (ボード) ゲームもまた魅力がたくさんあると考えている. よって, 私はその礎となるゲーム理論という分野を学びたいと思い, 特にテーブルゲームが位置する二人零和ゲームというものを調べてきた. 今回は実際にゲーム理論という分野について, まとめてみた.

2　ゲーム理論 (game theory) とは

ゲーム理論とは, 1944 年, 数学者の John von Neumann と, オーストリア学派の経済学者 Oskar Morgenstern による「ゲームの理論と経済行動」の出版によって誕生した学問であり, 経済社会における様々な意思決定の相互依存関係を数理的に厳密な方法論 (数理モデルの定式化など) を用いて分析する理論である. ゲーム理論はあらゆる分野で問題を捉えることができ, その範囲は経済学, 政治学, 経営学, 社会学, 哲学, 心理学, 生物学, 工学など, 多岐にわたる.

2.1　基礎概念

まずはじめに, ゲーム理論 (game theory) における用語の定義をしておく.
尚, ゲーム理論としての用語ではあるが, 今回は扱わない用語には $*$ を表示する.

- $\star$ **プレイヤー** (player)
  意思決定し, 行動する主体. 分析する状況に応じて, 個人から組織, 政府, 国家等, 様々それがゲームにおいて自律的な意思決定ができる最小単位. 参加するプレイヤーの数によって, 2 人ゲーム, 3 人ゲーム, n 人ゲームと呼ばれる.
- $\star$ **合理的** (rational)
  プレイヤーはそれぞれに明確に目的をもち, 可能な限り自分の目的を達成させるように行動選択をすること. ゲームにおける大前提. ゲームによって目的に反する結果 (勝ち負け) や, 一致する結果 (共同作業) になることもある.
- $\star$ **提携** (coalition)*
  プレイヤーの間で利害の対立や競争, 強力などの複雑で多様な相互関係依存が混在しているが, 複数のプレイヤーが協力を目的として形成する集団.
- $\star$ **戦略** (strategy)
  プレイヤーが行う, 様々な状況や局面に応じて必要となる行動の計画全てのプレイヤーがそれぞれの戦略に従ってゲームをプレイすることによって, ゲームの**結果** (outcome) が定まる.

⋆ **選好順序** (preference order)

ゲームに参加するプレイヤーが, それぞれの目的に従ってゲームの結果を評価することができ, 複数の可能なゲームの結果に関してもつもの.

⋆ **利得** (payoff), **効用** (utility)

プレイヤーの選好順序を数値化したもの. プレイヤーは自分の利得を可能な限り最大にするように戦略を決定する.

⋆ **ゲームのルール** (rule)

ゲームに参加するプレイヤーの集合, プレイヤーの目的, 選択可能な行動の集合, ゲームのプレイの進行を定める様々な規定の総称.

⋆ **情報完備ゲーム** (game with complete information)

ゲームに参加する全てのプレイヤーがゲームのルールを知っていて, 更に, 全てのプレイヤーが他のプレイヤーもゲームのルールを完全に知っていることを相互認識しているゲーム. この時, ゲームのルールは**共有知識** (common knowlegde) であるという.

ex) チェス, 将棋, 野球 etc.

⋆ **理性的** (intelligent)

各プレイヤーは相手プレイヤーも自分とともに合理的な主体であるとの認識に基づいて, 考えることができること.

⋆ **ゲームの解** (solution)

プレイヤーが相手の行動をどのように推論し, それに基づいてどのように行動し, どのような結果が実現するかを分析する概念道具. ゲームのルールが明確に定義されないと, プレイヤーの行動を分析できない.

⋆ **ゲームのモデル**

ゲームを数理的に表現するゲームモデルは, 代表的なものの中に**戦略形ゲーム** (game in strategic form), **展開形ゲーム** (game in extensive form), **提携形ゲーム** (game in coalitional form) がある.

- 戦略形ゲーム

  プレイヤーの戦略と利得の関係を用いて記述する, ゲームの基本モデル.

- 展開形ゲーム

  ゲームにおける手番の系列をゲームの動学的構造や情報構造を定式化する. このモデルを用いた分析が究めて重要.

- 提携形ゲーム

  プレイヤーの様々な提携にとって実現可能な総利得または利得分配の集合を記述.

2.2 戦略形ゲーム

定義 2.1.
プレイヤーの意思決定は相互に関連し, プレイヤーが得る利得は自分自身の戦略だけでなく, 他のプレイヤーの戦略にも依存する. このようなプレイヤーの相互依存関係を表現する基本的なモデルとしたものが戦略形ゲームとなる.

3 2 人零和ゲーム

今回の零和ゲームについてのルールを次のように定めるものとする.

定義 3.1.

(1) プレイヤーの数は 2.
(2) ゲームの結果についての利得の和は 0.
(3) 各プレイヤーの取り得る戦略は有限.
(4) ゲームの終了までの扱う戦略を 1 つであるとすると, プレイは 1 回まで.
(5) 各プレイヤーは自分の取る戦略の際, 相手がどの戦略を取りうるかは解らない.

これらをもとにプレイヤー 1 とプレイヤー 2 をそれぞれ $P_1,\ P_2$ として考える.

3.1 利得行列

P_1 の持つ戦略の集合を

$$\Pi_1 = \{i \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$$

P_2 の持つ戦略の集合を

$$\Pi_2 = \{j \mid j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

とすると, $P_1,\ P_2$ の取る戦略 i と j の関係で表される. P_1 及び, P_2 の利得関数をそれぞれ,

$$f_1(i,\ j),\ f_2(i,\ j)$$

と書き表される.
ここで, 零和 (利得関数の合計が 0, または一定数) なので,

$$f_1(i,\ j) + f_2(i,\ j) = 0 \quad (\text{又は一定})$$

となる. 又,

$$a_{ij} = f_1(i,\ j) = -f_2(i,\ j)$$

とおくと,

a_{ij} は P_1 の戦略 i と P_2 の戦略 j をとった時の結果に対する評価値を表していることになる.
但し, a_{ij} は有界な実数である.

この関係を行列にして表すと,

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

となり, この行列を**利得行列** (payoff matrix) という.
又, このような形で示されるゲームを**行列ゲーム** (matrix game) や $m \times n$ **ゲーム**という.

ここで, 利得行列 $A = (a_{ij})$ は P_1 の受け取る利得 (P_2 の支払う利得) を示す. 即ち,

P_1 はできるだけ大きな利得を得る.
P_2 はできるだけ小さな利得を支払う.

と考える.

この時, P_1 を**最大化プレイヤー**, P_2 を**最小化プレイヤー**と呼ぶ.
このゲームの対立により, ゲームの問題が発生する.

3.1.1　ミニマックス原理

例 3.1.
ある行列を考えてみる.

$$\begin{array}{cc} & P_2 \\ P_1 & \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

例えば, 上記のような行列ゲームがあるとすると, これらは P_1 と P_2 がそれぞれ取った戦略から, それに応じる P_1 の利得を表していることになる. ここで, P_2 は最小化プレイヤーであるから, P_1 が $i = 1$ の戦略をとったとすると, そのとき考えられる最悪の事態は,

$$\min\ (7,\ -1,\ -2) = -2$$

となる戦略 ($j = 3$) を最小化プレイヤーである P_2 が用いることである.
同様にして考えると, P_1 が $i = 2,$ 又は $i = 3$ の戦略をとったとすると, そのとき考えられる最悪

の事態はそれぞれ,

$$\begin{array}{ll} \min\ (-5,\ 0,\ 4) = -5 & (i=2) \\ \min\ (5,\ 1,\ 2) = 1 & (i=3) \end{array}$$

となる戦略を P_2 が取るときである. 従って, 予想される最悪の事態の中で最善なものは,

$$\max\ (-2,\ -5,\ 1) = 1$$

となる戦略 $i = 3$ を P_1 が取ることである.
即ち, 最悪の事態でも P_1 が $i = 3$ の戦略をとれば, 利得 *1* が保証されていることになる.

次に, P_2 について考えてみる.
P_1 は最大化プレイヤーであるから, P_2 が $j = 1$ の戦略をとったとすると,

$$\max\ (7,\ -5,\ 5) = 7$$

となる戦略 $(i = 1)$ を P_1 が用いることが, P_2 にとって最悪の事態となる.
こちらも同様にして考えると, P_2 が $j = 2,\ j = 3$ の戦略をとったとすると, そのとき考えられる最悪の事態はそれぞれ,

$$\begin{array}{ll} \max\ (-1,\ 0,\ 1) = 1 & (j=2) \\ \max\ (-2,\ 4,\ 3) = 4 & (j=3) \end{array}$$

となる戦略を P_1 が取る時である. 従って, 予想される利得の最小値となる戦略は,

$$\min\ (7,\ 1,\ 4) = 1$$

となる戦略 $j = 2$ を取ることである.

このようにして得られた値は P_1 にしても, P_2 にしても同じ値 1 が得られる. 即ち両者の納得できる利得が 1(結果として見れば P_2 の利得は -1) であり, これがプレイヤーの合理的な思考過程になり得る.

一般に利得行列 $A = (a_{ij})$ が与えられたとき, P_1 は相手が利得を最小化しようとしていることを考慮して戦略 i を取ったとき, 最悪でも得られる利得は

$$\min\ (a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in}) = \min_i a_{ij}$$

であり, この値を P_1 の戦略 i についての**保証水準** (security level) という.
更に, P_1 は保証水準の最高を目指すので,

$$\begin{aligned} v_1 &= \max\ (\min_j a_{1j},\ \min_j a_{2j},\ \ldots,\ \min_j a_{mj}) \\ &= \max_i \min_j a_{ij} \end{aligned}$$

となる v_1 が得られる. この値 v_1 をこの利得行列の**マックスミニ値** (maxmin value) という.
また, そのときの P_1 の戦略を**マックスミニ戦略** (maxmin strategy) という.

次に, P_2 は相手が利得を最大化しようとしていることを考慮して戦略 j を取ったとき, 最悪の場合に支払う利得は,

$$\max\,(a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{mj}) = \max_i a_{ij}$$

であり, この値を P_2 の戦略 j についての**保証水準**という.
更に, P_2 は保証水準の最低を目指すので,

$$\begin{aligned} v_2 &= \min\,(\max_i a_{i1},\ \max_i a_{i2},\ \ldots,\ \max_i a_{in}) \\ &= \min_j \max_i a_{ij} \end{aligned}$$

となる v_2 が得られる. この値 v_2 をこの利得行列の**ミニマックス値** (minmax value) といい,
そのときの P_2 の戦略を**ミニマックス戦略** (minmax strategy) という.

このように, 最大化プレイヤー v_1 を, 最小化プレイヤーは v_2 を得るような考え方は, 利害の対立が起こることを前提に考慮していく. その最大化プレイヤー行動原理を**マックスミニ原理** (maxmin principle), 最小化プレイヤーの行動原理を**ミニマックス原理** (minmax principle) といい,
この 2 つを合わせて**ミニマックス原理**という.
ここでは, 2 人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動しているものとする.

3.1.2 均衡点

ミニマックス原理に基づいて考えると, 利得行列 $A = (a_{ij})$ が与えられたとき,

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

が成り立つとき, このゲームは「**厳密に決定される** (strictly determined)」または「**厳密に確定的である**」という. この時, マックスミニ戦略を i^*, ミニマックス戦略を j^* とすると, このゲームは戦略の組 $(i^*,\ j^*)$ で均衡しているとみられる.
この時, 戦略の組 $(i^*,\ j^*)$ をこのゲームの**均衡点** (equlibrium point) といい, 均衡点における値 $v(A) = a_{i^*j^*}$ を**ゲームの値** (value) という.
均衡点 $(i^*,\ j^*)$ とゲームの値 $v(A)$ を求めることを, **ゲームを解く**という.

3.1.3 鞍点と最適戦略

一般に利得行列 $A = (a_{ij})$ が与えられたときには,

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

であり, 必ずしも $v_1 = v_2$ になるとは限らない. 即ち, ゲームは厳密に決定されるとは限らない.
一般に利得行列 $A = (a_{ij})$ において, 任意の $i,\ j$ に対して,

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$$

が成立するとき, $(i_0,\ j_0)$ を行列の**鞍点** (saddle point) といい, $a_{i_0j_0}$ を**鞍点値** (saddle point value) という.

定理 3.2.
行列ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は, その利得行列に少なくとも 1 つ鞍点が存在することである. その時の鞍点は均衡点であり, 鞍点値はゲームの値.

証明.
行列ゲーム $A = (a_{ij}),\ i = 1,\ \ldots,\ m, \quad j = 1,\ \ldots,\ n$ が与えられたとし, 行列 A の鞍点を $(i_0,\ j_0)$ とすれば, 全ての i と j について,

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$$

であるから,

$$\max_i a_{ij_0} = a_{i_0j_0} = \min_j a_{i_0j}$$

である. また, 常に,

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{ij_0}, \qquad \min_j a_{i_0j} \leq \max_i \min_j a_{ij}$$

であるから,

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq a_{i_0j_0} \leq \max_i \min_j a_{ij}$$

となる. そして,

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

であるから,

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0j_0} = \min_j \max_i a_{ij}$$

が成立する. 即ち, ゲームは厳密に確定的であり, 鞍点 $(i_0,\ j_0)$ は均衡点であり, 鞍点値 $a_{i_0j_0}$ はゲームの値である. 次に厳密に確定的である時に鞍点が存在することを示す.

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

が成立していて, その 1 つの均衡点を $(i^*,\ j^*)$ とする. i^* はマックスミニ戦略であるから,

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i^*j}$$

である. 同様に, j^* はミニマックス戦略から

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*}$$

である. 即ち,

$$\min_j a_{i^*j} = \max_i a_{ij^*}$$

であるから,

$$\max_i a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}$$

即ち, 任意の i に対して,

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}$$

である. 同様に最大の定義から,

$$a_{i^*j^*} \leq \max_i a_{ij^*}$$

従って,

$$a_{i^*j^*} \leq \min_j a_{i^*j}$$

即ち, 任意の j に対して,

$$a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

よって,

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

即ち, 均衡点 $(i^*,\ j^*)$ は行列 A の鞍点である. ■

定理 3.3.
厳密に確定的な零和 2 人ゲームにおいて, 均衡点が複数個ある場合には, それぞれの均衡点における値は同じである. また, $(i_0,\ j_0)$ 及び $(i^*,\ j^*)$ がともに均衡点ならば, $(i_0,\ j^*)$, $(i^*,\ j_0)$ も均衡点である. 即ち, 均衡戦略は交換可能である.

3.1.4 戦略の支配

例 3.2.

$$\begin{array}{cc} & P_2 \\ P_1 & \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

上記の行列を考える.
P_1 のついて見てみると, 戦略 $i=1$ と $i=3$ を比べると, 戦略 $i=1$ は P_2 がどの戦略を取っても戦略 $i=3$ に勝っている. このことから, 合理的に考えてみると, P_1 は戦略 $i=3$ を選ぶことはあり得ないことが解る.
同様にして P_2 を見てみる. 戦略 $j=1$ と $j=2$ を比べると, 戦略 $j=2$ は P_1 がどの戦略を取っても戦略 $j=1$ よりも P_2 の損失は小さい. 即ち, P_2 は合理的に考えて戦略 $j=1$ を選ぶことはあり得ない.
よって, 上記の行列は

$$\begin{array}{cc} & P_2 \\ P_1 & \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{array}\right] \end{array}$$

のように縮小化される.

例のような考え方を**ゲームの支配** (dominate) という.

行列 $A=(a_{ij})$ において, 最大化プレイヤーのある 2 つの戦略 i と k を比較したとき, 全ての j について

$$a_{ij} > a_{kj}$$

の時, i は k を支配するという. また, 全ての j について,

$$a_{ij} \geq a_{kj}$$

で, かつ, 全ての j について, $a_{ij}=a_{kj}$ でないとき, i は k を**弱く支配する** (weakly dominate) という. これらは最小化プレイヤーのある 2 つの戦略 j と l でも同様なことがいえる.

3.2 ミニマックス定理

3.2.1 混合戦略

ゲームにおいて完全予見は不可能である. そして, プレイヤーは合理的な思考ではなく, より多くの利得の獲得を目指そうとする. 即ち, 多少の利得損失の危険を伴いつつも, 「賭」なる決定を行う. つまり, そこに最適な「賭」の確立が考えられる. そして, それには主体的な「賭」の確立による利得の期待値に基づいて, 意思決定を行う 1 つの行動原理へ導く. この利得の期待値を**期待利得**と言う. この期待利得に対する原理から, $p,\ q$ の新しい変数を用いた, **期待利得関数** $E(p,\ q)$ を考えることができる.

この新しい戦略的変数である確立ベクトル $p,\ q$ を**混合戦略** (mixed strategy) という. これに対して, $i,\ j$ で表されていた戦略を**純戦略** (pure strategy) という.

P_1(バッター) が表のマスそれぞれを 1/4 ずつ念頭に置く.

$$(80\%+0\%+10\%+30\%)/4=30\%$$

表 1　打率

	直球	変化球
直球	80%	0%
変化球	10%	30%

P_2(ピッチャー) が変化球のみしか投げない.

$$(0\% + 30\%)/2 = 15\%$$

表 1 のような例から, $P_1,\ P_2$ をバッター, ピッチャーとして考えると, P_1 は P_2 が戦略を念頭に置く割合によって, 期待値が変動する. 即ち, 最適解はあるが, それは相手プレイヤーに依存する.

3.2.2　ミニマックス定理

プレイヤー 1 のもつ純戦略の集合

$$\Pi_1 = \{i \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$$

プレイヤー 2 のもつ純戦略の集合

$$\Pi_2 = \{j \mid j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

とすると, 利得行列は

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

その時, プレイヤー 1 のもつ混合戦略は

$$p = (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m), \quad p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ \ldots,\ p_m \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$$

という確率ベクトルで表され, プレイヤー 2 のもつ混合戦略は

$$q = (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n), \quad q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0,\ \ldots,\ q_n \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$$

という確率ベクトルで表される.

この時, 零和ゲームにおける利得関数は, q^T を q の転置ベクトルとして,

$$E(p,\ q) = pAq^T = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + \ldots + a_{mn}p_mq_n$$

と表される.

最大化プレイヤー P_1 にとって, 自己の取る保証水準は,

$$\min_q E(p,\ q)$$

であり, この保証水準の中の最大値を指呼のもつ変数 p を動かして実現が可能より,

$$v_1 = \max_p \min_q E(p,\ q)$$

が, プレイヤー 1 が獲得可能であると期待する値になる.
また, 最小化プレイヤー P_2 にとっては, 自己のとる戦略 q の保証水準は

$$\max_p E(p,\ q)$$

であり, この保証水準の中の最小値を自己のもつ変数 q を動かして実現が可能より,

$$v_2 = \min_q \max_p E(p,\ q)$$

が, プレイヤー 2 が獲得可能であると期待する値になる.
また, 明らかに

$$\max_p \min_q E(p,\ q) \leq \min_q \max_p E(p,\ q)$$

が成立する.

定理 3.4. ミニマックス定理
行列ゲームにおいて, プレイヤー 1 及びプレイヤー 2 の混合戦略の集合をそれぞれ $S_1,\ S_2$ としたとき,

$$\max_{p \in S_1}\ \min_{q \in S_2}\ pAq^T = \min_{q \in S_2}\ \max_{p \in S_1}\ pAq^T$$

が成り立つ.
この時, これを成立させる戦略の組 $(p^*,\ q^*)$ をこのゲームの均衡点という.

ミニマックス定理によって, 均衡点の存在が保証されたことになるが, これは均衡点は一意とは限らない. 均衡点における利得を**ゲームの値**という. 即ち,

$$v = v(A) = p^* A q^{*T}$$

がゲームの値となる. また, 均衡点とゲームに値を求めることで, $\{(p^*,\ q^*),\ v\}$ を**ゲームの解**という.

定理 3.5.
戦略の組 $(p^*,\ q^*)$ が行列ゲームの均衡点であるための必要十分条件は, $(p^*,\ q^*)$ が関数 $E(p,\ q) = pAq^T$ の鞍点であることである. 即ち, $p \in S_1,\ q \in S_2$ に対して,

$$E(p,\ p^*) \leq E(p^*,\ q^*) \leq E(p^*,\ q)$$

が成立することである.

定理 3.6.
行列ゲームの値は一意に定まり, $(p^*,\ q^*)$, $(p^0,\ p^0)$ を均衡点とすると, $(p^*,\ q^0)$, $(p^0,\ q^*)$ も均衡点である.

証明. 定理 3. 5 から,

$$pAq^{*T} \leq p^*Aq^{*T} \leq p^*Aq^T \tag{1}$$
$$pAq^{0T} \leq p^0Aq^{0T} \leq p^0Aq^T \tag{2}$$

である. 式 (1) において, $p = p^0,\ q = q^0$ とおくと,

$$p^0Aq^{*T} \leq p^*Aq^{*T} \leq p^*Aq^{0T}$$

式 (2) において, $p = p^*,\ q = q^*$ とおくと,

$$p^*Aq^{0T} \leq p^0Aq^{0T} \leq p^0Aq^{*T}$$

従って,

$$p^*Aq^{*T} = p^0Aq^{*T}$$

であるから, ゲームの値は等しい. 即ち, ゲームの値は一意に定まる. また, この時,

$$p^*Aq^{0T} = p^*Aq^{*T} = p^0Aq^{0T}$$

であるから,

$$pAq^{0T} \leq p^*Aq^{0T} \leq p^*Aq^T$$
$$pAq^{*T} \leq p^0Aq^*T \leq p^0Aq^T$$

である. 従って, $(p^*,\ q^0)$, $(p^0,\ q^*)$ も均衡点である. ∎

定理 3.7.
$v(A)$ がゲームの値, $(p^*,\ q^*)$ が均衡点であるための必要十分条件は, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ に対して,

$$E(i,\ q^*) \leq v(A) \leq E(p^*,\ j)$$

が成立することである.

証明.
$\{(p^*,\ q^*),\ v(A)\}$ が解ならば,
$$v(A) = E(p^*,\ q^*)$$
であるから, 定理 3. 5 より,
$$E(p,\ q^*) \leq v(A) \leq E(p^*,\ q)$$
この式で p を i, q を j に置き換えれば定理の式が成立する. 次に定理の式が成立しているとすると, S_1 の任意の p に対して,
$$\sum_{i=1}^{m} E(i,\ q^*)p_i \leq \sum_{i=1}^{m} v(A)p_i = v(A)$$
であるから,
$$E(p,\ q^*) \leq v(A).$$
同様にして, S_2 の任意の q に対して,
$$v(A) \leq E(p^*,\ q)$$
以上の 2 式から, $p = p^*,\ q = q^*$ とすると,
$$E(p^*,\ q^*) \leq v(A), \quad v(A) \leq E(p^*,\ q^*)$$
となるから,
$$v(A) = E(p^*,\ q^*).$$
従って,
$$E(p,\ q^*) \leq E(p^*,\ q^*) \leq E(p^*,\ q)$$
となり, $(p^*,\ q^*)$ は均衡点で, $v(A)$ はゲームの値である. ∎

定理 3.8.
$\{(p^*,\ q^*),\ v\}$ をゲームの解とすると,
$$\max_i E(i,\ q^*) = \min_i E(p^*,\ j) = v$$
が成立する.

証明. 定理 3. 7 から $j = 1,\ \ldots,\ n$ に対して,
$$v \leq E(p^*,\ j),$$

$$v \leq \min_j E(p^*,\ j).$$

もし,

$$v < \min_j E(p^*,\ j)$$

とすると, 全ての j に対して,

$$v < E(p^a st,\ j),$$
$$\sum_{j=1}^{n} v \cdot q_j^* < \sum_{j=1}^{n} E(p^*,\ j) q_j^*,$$
$$v < E(p^*,\ q^*)$$

これは v がゲームの値であることに反するから,

$$v = \min_i E(p^*,\ j)$$

同様にして,

$$v = \max_i E(i,\ q^*)$$

が成立して, 定理が成立する. ∎

補題 3.1.
前の定理から, 次のことが成立する.

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq v(A) \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

4 まとめと今後の課題

ゲーム理論を学習することによって, 私たちの身の回りにある様々な事柄がゲーム理論を用いて表現し, 最適化することが可能であることが解った. 今回の学習でゲーム理論の概要はアウトラインは解ったので, これらを様々な範囲に広げていき知識を増やしていきたい. また, 今回は一部の考え方のみでプレイヤーのことまで考えたまでだったので, どのような状態でどのような行動心理が働くのか調べるシミュレーションの作成し, より具体的な結果を得られるように努めていきたい.

また, 今回は戦略形ゲームの一部分にのみ触れる程度であったが, これを機に展開形ゲーム, 提携形ゲームなどにも触れて, 理解を深めていきたい. そして, ゲーム理論を使って実際に物事を検証していきたい.

参考文献

[1] 鈴木光男，ゲーム理論，共立出版，2003 年.
[2] 岡田章，ゲーム理論，有斐閣，2011 年.
[3] 逢沢明，ゲーム理論トレーニング，かんき出版，2008 年.