ジョルダン標準形

芝浦工業大学　数理科学研究会

長田　祐輝

〜芝浦祭研究発表〜

平成 27 年 11 月 6 日

目 次

1　ジョルダン標準形

定義 1.1 (ジョルダン細胞) サイズ n で次のような行列をジョルダン細胞という.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$$

この行列を $J(a,n)$ で表す.

定義 1.2 (ジョルダン標準形) 次のような行列をジョルダン標準形という.

$$\begin{bmatrix} J(\lambda_1,n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_s,n_s) \end{bmatrix}$$

ただし, $\lambda_1,\cdots,\lambda_s \in \mathbb{C}$, $n_1,\cdots,n_s \in \mathbb{N}$ である. 空白部分は 0 が入っているものとする.

定義 1.3 (核 (Kernel)) A を行列とする. このとき $\mathrm{Ker}A$ を次のように定義する.

$$\mathrm{Ker}A := \{x \in \mathbb{C} \mid Ax = 0\}$$

注意 1.1 (次元 (dimension)) $A \subset \mathbb{C}$ とする. このとき $\dim\mathrm{Ker}A$ は連立 1 次方程式 $Ax = 0$ を解いたときの任意定数の個数である.

定理 1.1 $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする. A の相異なる固有値を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする. $p_{11},\ p_{21}$ を $\mathrm{Ker}(A-\alpha E)$ に属す 1 次独立なベクトル, $q_{11},\ q_{21}$ を $\mathrm{Ker}(A-\beta E)$ に属す 1 次独立なベクトル, $r_{11},\ r_{21}$ を $\mathrm{Ker}(A-\gamma E)$ に属す 1 次独立なベクトルとする. $p_{12},\ \cdots\ p_{1,p_1}$ を $p_{1i}=(A-\alpha E)p_{1,i+1}$ で定義する. 同様に, $p_{22},\ \cdots\ p_{2,p_2}$ と $q_{12},\ \cdots\ q_{1,q_1}$ と $q_{22},\ \cdots\ q_{2,q_2}$ と $r_{12},\ \cdots\ r_{1,r_1}$ と $r_{22},\ \cdots\ r_{2,r_2}$ を定義する. このとき, $p_{11},\ \cdots\ p_{1,p_1},\ p_{21},\ \cdots\ p_{2,p_2},\ q_{11},\ \cdots\ q_{1,q_1},\ q_{21},\ \cdots\ q_{2,q_2},\ r_{11},\ \cdots\ p_{1,r_1},\ r_{21},\ \cdots\ r_{2,r_2}$ は 1 次独立である.

証明 1.1 (証明) (前準備) $(A-\alpha E)^{k-1}p_{1k}=p_{11}$ である. また, $(A-\gamma E)^k(A-\beta E)^l p_{11}=(\alpha-\gamma)^k(\alpha-\beta)^l p_{11}$ である.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}p_{11}+\cdots+a_{1,p_1}p_{1,p_1}+a_{21}p_{21}+\cdots+a_{2,p_2}p_{2,p_2}\\
&+b_{11}q_{11}+\cdots+b_{1,q_1}p_{1,q_1}+b_{21}q_{21}+\cdots+b_{2,q_2}q_{2,q_2}\\
&+c_{11}r_{11}+\cdots+c_{1,r_1}r_{1,r_1}+c_{21}r_{21}+\cdots+c_{2,r_2}r_{2,r_2}=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

とおく. 両辺に $(A-\gamma E)^{\max\{r_1,\ r_2\}}(A-\beta E)^{\max\{q_1,\ q_2\}}(A-\alpha E)^{\max\{p_1,\ p_2\}-1}$ を掛けると,

$$a_{1,p_1}p_{11}+a_{2,p_2}p_{21}=0$$

となる. (今, この式は, $p_1=p_2$ の場合に示した. $p_1<p_2$ の場合には, $a_{1,p_1}p_{11}$ の項が消え, $p_1>p_2$ の場合には, $a_{2,p_2}p_{21}$ の項が消える.) $p_{11},\ p_{21}$ は 1 次独立だから, $a_{1,p_1}=a_{2,p_2}=0$ となる. これを, (1) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
&a_{11}p_{11}+\cdots+a_{1,p_1-1}p_{1,p_1-1}+a_{21}p_{21}+\cdots+a_{2,p_2-1}p_{2,p_2-1}\\
&+b_{11}q_{11}+\cdots+b_{1,q_1}p_{1,q_1}+b_{21}q_{21}+\cdots+b_{2,q_2}q_{2,q_2}\\
&+c_{11}r_{11}+\cdots+c_{1,r_1}r_{1,r_1}+c_{21}r_{21}+\cdots+c_{2,r_2}r_{2,r_2}=0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

となる. 同様に $a_{1,p_1-1}=a_{2,p_2-1}=\cdots=a_{11}=a_{21}=0$ となる. これを, (2) に代入し, 上と同様の議論をすれば,

$$b_{1,q_1}=b_{2,q_2}=\cdots=b_{11}=b_{21}=c_{1,r_1}=c_{2,r_2}=\cdots=c_{11}=c_{21}=0$$

となる. よって, $p_{11},\ \cdots\ p_{1,p_1},\ p_{21},\ \cdots\ p_{2,p_2},\ q_{11},\ \cdots\ q_{1,q_1},\ q_{21},\ \cdots\ q_{2,q_2},\ r_{11},\ \cdots\ p_{1,r_1},\ r_{21},\ \cdots\ r_{2,r_2}$ は 1 次独立である.

1.1　ジョルダン標準形の求め方

1. 固有多項式 $|A-\lambda E|$ を求める.

2. 固有多項式が $(\lambda_1-\lambda)^{n_1}\cdots(\lambda_s-\lambda)^{n_s}$ となったとする ($\lambda_1,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{C}$ は固有値である).

3. 各 i ($i=1,\cdots,s$) に対して, $\mathbb{C}^n$ の部分空間の増大列 $\mathrm{Ker}(A-\lambda_i E)\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathrm{Ker}(A-\lambda_i E)^{m_i}=\cdots$ を求める ($\mathrm{Ker}(A-\lambda_i E)^{m_i}$ がこの増大列の最大の集合).

4. 各 j ($j=2,\cdots,m_i$) に対して, $d_j=\mathrm{dimKer}(A-\lambda_i E)^j-\mathrm{dimKer}(A-\lambda_i E)^{j-1}$ とおき, $d_1=\mathrm{dimKer}(A-\lambda_i E)$ とおく.

5. 各 i ($i=1,\cdots,s$) に対して, 1 次独立な $p(\lambda_i)_{m_i,1}$, $\cdots$, $p(\lambda_i)_{m_i,d_{m_i}}\in\mathrm{Ker}(A-\lambda_i E)^{m_i}\backslash\mathrm{Ker}(A-\lambda_i E)^{m_i-1}$ を求める.

6. $j=m_i$ とする.

7. $p(\lambda_i)_{j-1,1}=(A-\lambda_i E)p(\lambda_i)_{j,1}$, $\cdots$, $p(\lambda_i)_{j-1,d_j}=(A-\lambda_i E)p(\lambda_i)_{j,d_j}$ とおき, もし $d_{j-1}>d_j$ ならば, $p(\lambda_i)_{j-1,1},\cdots$, $p(\lambda_i)_{j-1,d_j},p(\lambda_i)_{j-1,d_j+1}$, $\cdots$, $p(\lambda_i)_{j-1,d_{j-1}}$ が 1 次独立になるように, $p(\lambda_i)_{j-1,d_j+1}$, $\cdots$, $p(\lambda_i)_{j-1,d_{j-1}}$ を選ぶ.

8. j を改めて $j-1$ にし, $j>1$ なら, 6. へ. $j=1$ なら 7. へ.

9. $p(\lambda_i)_{11}=(A-\lambda_i E)p(\lambda_i)_{21}$, $\cdots$, $p(\lambda_i)_{1,d_2}=(A-\lambda_i E)p(\lambda_i)_{2,d_2}$ とおく. もし, $d_1>d_2$ ならば, $p(\lambda_i)_{11}$, $\cdots$, $p(\lambda_i)_{1,d_2}$, $p(\lambda_i)_{1,d_2+1}$, $\cdots$, $p(\lambda_i)_{1,d_1}$ が1次独立になるように, $p(\lambda_i)_{1,d_2+1}$, $\cdots$, $p(\lambda_i)_{1,d_1}$ を選ぶ.

10. $P=[p(\lambda_1)_{11},\ \cdots,\ p(\lambda_1)_{1,d_1},\cdots,\ p(\lambda_1)_{m_1,d_{m_1}},\cdots,\ p(\lambda_s)_{m_s,d_{m_s}}]$ とおく.

11. P^{-1} を計算する.

12. $P^{-1}AP$ を計算する.

13. 終了

2　具体例

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -5 & -4 \\ 10 & 12 & 5 & -11 & -10 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 8 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$ とする. A のジョルダン標準形を求める.

A の固有多項式は

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & 6-\lambda & 2 & -5 & -4 \\ 10 & 12 & 5-\lambda & -11 & -10 \\ 2 & 4 & 1 & -3-\lambda & -2 \\ 4 & 8 & 0 & -8 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^5$$

よって, A の固有値は $\lambda = 2$ (5 重根).

次に $A - 2E$ を求める.

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -5 & -4 \\ 10 & 12 & 3 & -11 & -10 \\ 2 & 4 & 1 & -5 & -2 \\ 4 & 8 & 0 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$ である. $A - 2E$ を標準形にすると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. よって, $\dim\mathrm{Ker}(A-2E) = 2$ となる.
同様に $(A-2E)^2$, $\dim\mathrm{Ker}(A-2E)^2$, $\cdots$ と求めていくと,

$$(A-2E)^2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & -2 & 6 \\ 6 & 0 & 3 & 3 & -9 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & -6 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $(A-2E)^2$ の標準形は,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $\dim\mathrm{Ker}(A-2E)^2 = 4$ である.

$$(A-2E)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $\dim\mathrm{Ker}(A-2E)^3 = 5$ である.
($\mathrm{Ker}(A-2E)^3$ が $\mathbb{C}^5$ に含まれる最大の部分集合である.)
以上のことから, $\mathrm{Ker}(A-2E)$, $\mathrm{Ker}(A-2E)^2 \backslash \mathrm{Ker}(A-2E)$, $\mathrm{Ker}(A-2E)^3 \backslash \mathrm{Ker}(A-2E)^2$ には次のように 1 次独立なベクトル $p(2)_{11},\ p(2)_{12},\ p(2)_{21},\ p(2)_{22},\ p(2)_{31}$ が属している.

$\mathrm{Ker}(A-2E)$	$\mathrm{Ker}(A-2E)^2 \backslash \mathrm{Ker}(A-2E)$	$\mathrm{Ker}(A-2E)^3 \backslash \mathrm{Ker}(A-2E)^2$
$p(2)_{11}$	$p(2)_{21}$	$p(2)_{31}$
$p(2)_{12}$	$p(2)_{22}$	-

表 1: 固有ベクトルの表

ここで, $p(2)_{21} = (A-2E)p(2)_{31}$, $p(2)_{11} = (A-2E)p(2)_{21}$, $p(2)_{12} = (A-2E)p(2)_{22}$ とする.
よって $p(2)_{31}$, $p(2)_{22}$ さえ求めてしまえばよい.
ここでは, $p(2)_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $p(2)_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とするとそれぞれ条件を満たす. ここで, $p(2)_{11},\ p(2)_{21},\ p(2)_{31},\ p(2)_{12},\ p(2)_{22}$ は 1 次独立になる. よって $P = [p(2)_{11},\ p(2)_{21},\ p(2)_{31},\ p(2)_{12},\ p(2)_{22}] = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと, P は正則行列になり,
$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ となる. よって A のジョルダン標準形は,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

となる.

補足
$(A-2E)^3p(2)_{31}=0,\ (A-2E)^2p(2)_{22}=0,\ p(2)_{21}=(A-2E)p(2)_{31},\ p(2)_{11}=(A-2E)p(2)_{21},\ p(2)_{12}=(A-2E)p(2)_{22}$ より, $(A-2E)p(2)_{11}=0,\ (A-2E)p(2)_{12}=0$ であるから,

$$\begin{aligned}
AP &= A[p(2)_{11},\ p(2)_{21},\ p(2)_{31},\ p(2)_{12},\ p(2)_{22}] = [Ap(2)_{11},\ Ap(2)_{21},\ Ap(2)_{31},\ Ap(2)_{12},\ Ap(2)_{22}] \\
&= [2p(2)_{11},\ p(2)_{11}+2p(2)_{21},\ p(2)_{21}+2p(2)_{31},\ 2p(2)_{12},\ p(2)_{12}+2p(2)_{22}] \\
&= [p(2)_{11},\ p(2)_{21},\ p(2)_{31},\ p(2)_{12},\ p(2)_{22}] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= P \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

より, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ となる.

3 応用例

連立の定数係数の線形微分方程式に使われる.
例えば, x を t を変数とする, n 個の関数を成分とするベクトル値関数とする. A を n 次正方行列とする. このとき連立微分方程式 $Ax=0$ を解くことを考える. もし A が対角化可能なら, すぐに解を得ることが出来る. しかし A が対角化可能でなくても, A をジョルダン標準形にすれば, 解を得ることが出来る.

4 参考文献

[1] 西山享, 重点解説ジョルダン標準形　行列の標準形と分解をめぐって, 数理科学編集部, 2010.
[2] 千葉克裕, 行列の関数とジョルダン標準形【増補改訂版】, サイエンティスト社, 2010.
[3]「ときわ台学/固有値論/一般固有空間, ジョルダン標準形」, <http://f-denshi.com/000TokiwaJPN/05unitr/110unt.html>, (2015/10/03)