ペル方程式

解を求めて

平成 27 年 11 月 6 日

※計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

制作: BP15039　澤崎航輔

目 次

1　研究背景 **2**

2　ペル方程式の紹介 **2**

3　ペル方程式の最小解と一般解 **2**

3.1　実際に計算しよう 4

4　d が平方数のときは解を持つのか？ **7**

5　一般解から $\sqrt{d}$ の近似値を得る **9**

6　最小解は規則的 !? **12**

7　課題と反省点 **16**

8　作成して使用したプログラム **16**

9　参考文献 (Special Thanks) **18**

10　付録：$d = 105$ までの最小解のリスト **18**

1 研究背景

今回ペル方程式をテーマとして研究をした理由としては, 大学受験勉強として解けなかった問題のテーマがペル方程式だったという事である. そのことをずっと引きずっていたのもあり整数分野に少し興味を持ったので今回の研究に至った.

2 ペル方程式の紹介

ペル方程式とは d を平方数ではない自然数として方程式

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{1}$$

の解の組 (x, y) を求める問題である. このとき (x, y) に対して自然数解, 整数解など条件を付けて解く.1657 年フェルマー [1] は他の数学者達に

$$x^2 - 61y^2 = 1$$

の自然数解の組を求めるように言った. この問題に対してウィリアム・ブラウンカー [2] がペル方程式の一般的な解法を見つけたがオイラー [3] がその解法を発見したのをジョン・ペル [4] だと誤解してペル方程式と呼ばれるようになったといわれている.
(1) の式は $(x, y) = (X, Y)$ が解のとき, $(X, -Y), (-X, Y), (X, Y)$ も解となる. 今回の研究では (x, y) を正の整数という条件を付けて研究を進めていくこととする.
ペル方程式 (1) は d の値に関係なく $(x, y) = (1, 0)$ を解に持つ.実際に代入して確かめると (1) の左辺は

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 1^2 - d \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

となるので $(x, y) = (1, 0)$ は確かに d の値に関係なくペル方程式の解となる.

3 ペル方程式の最小解と一般解

d を平方数ではない自然数とし, x_n と y_n を自然数とするとき

$$x_n^2 - dy_n^2 = 1 \tag{2}$$

の解の集合を A とおく.このときペル方程式の解の組 (x_n, y_n) に対して

$$x_n + \sqrt{d}y_n (> 1)$$

を最小にするような (x_n, y_n) を $(x_n, y_n) = (x_1, y_1) \in A$ とおく.このとき(2)の $(x_n, y_n) = (1, 0)$ を除いた全ての解は自然数 n を用いて

$$(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n$$

で与えられる. このときの x_1 と y_1 をペル方程式の最小の解と呼ぶことにする.
ペル方程式の一般の解 (最小の解) 以外を求めるにはまずはペル方程式の最小の解を求めることが必要であ

[1] ピエール・ド・フェルマー : Pierre de Fermat.
[2] ウィリアム・ブラウンカー : William Brouncker.
[3] レオンハルト・オイラー : Leonhard Euler : .
[4] ジョン・ペル : John Pell.

る．この最小の解は d の値によって異なる．
(例 1)

$$x_n^2 - 2y_n^2 = 1$$

のとき ($d = 2$ のとき) このペル方程式の最小の解は $(x_1, y_1) = (3, 2)$ である．
(例 2)

$$x_n^2 - 29y_n^2 = 1$$

のとき ($d = 29$ のとき) このペル方程式の最小の解は $(x_1, y_1) = (9801, 1820)$ である．
(例 3)

$$x_n^2 - 61y_n^2 = 1$$

のとき ($d = 61$ のとき) このペル方程式の最小の解は $(x_1, y_1) = (1766319049, 226153980)$ である．
このように d の値によって最小解の値は異なり, また d の値が増加していくほど最小解の値は大きくなりやすい. これをしらみつぶしで計算するのは非常に時間がかかってしまう．ここでペル方程式の最小解を手計算で計算する方法を紹介する．

ペル方程式の最小解を求めるための漸化式

$$\begin{aligned}
&a_{-1} = \sqrt{d}, a_0 = 1 \\
&a_{n+1} = a_{n-1} + k_n a_n \\
&k_n = [b_n] \\
&b_n = -\frac{a'_{n-1}}{a'_n} \\
&b_{n+1} = \frac{1}{b_n - k_n}
\end{aligned}$$

ただし n は -1 以上の整数であり a の共役な無理数を a' とする．$[b_n]$ はガウス記号である．
またこのとき数学者のラグランジュとオイラーによって上の漸化式に対して b_n の分母を 1 にするような n が存在してそのときの n による a_n が最小解を与えることがわかっている．

このとき求めた a_nを $x_1 + \sqrt{d}y_1 = a_n$と比較することで最小解 (x_1, y_1) を求めることができる.ただし求めた解を代入した答えの値が -1 となるときは答えの値が 1 となるまで $(a_n)^m$を計算すればよく, この計算をすることで $x_n^2 - dy_n^2 = 1$ の正しい最小の解を求めることができる．
これによって得られた最小解を用い

$$x_n + \sqrt{d}y_n = (x_1 + \sqrt{d}y_1)^n$$

を計算して両辺を比較することで一般解を求めることができる．

3.1 実際に計算しよう

先ほどの式で実際に最小解を求められるかを確認する．まずは $d=2$ のときで最小の自然数解を求めることができるのかを確認してみることにする.例として $d=2$ のときを考えるとこの時の最小解は $(x_1, y_1) = (3,2)$ である

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

について最小解を求めるための漸化式は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} &a_{-1} = \sqrt{2}, a_0 = 1 \\ &a_{n+1} = a_{n-1} + k_n a_n \\ &k_n = [b_n] \\ &b_n = -\frac{a'_{n-1}}{a'_n} \\ &b_{n+1} = \frac{1}{b_n - k_n} \end{aligned}$$

ただしnは-1以上の整数であり $x_n + \sqrt{d}y_n$との共役を $x_n - \sqrt{d}y_n$ とする．$[b_n]$ はガウス記号である.
まず b_0から計算していく

$$\begin{aligned} b_0 &= -\frac{-\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \\ k_0 &= [b_0] = [\sqrt{2}] = 1 \\ a_1 &= \sqrt{2} + 1 \cdot 1 \\ &= 1 + \sqrt{2} \\ b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} \\ &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

となるので a_1が $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$ の最小の解を与える.

$$x_1 + \sqrt{2}y_n = 1 + \sqrt{2}$$

となるのでこれを $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$ に代入して確かめる.

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 1^2 - 2 \cdot 1^2 \\ &= 1 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

となり値は -1 になってしまうので $(a_1)^2$ を計算して比較することにする.

$$\begin{aligned} x_1 + \sqrt{d}y_1 &= (1+\sqrt{2})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 \\ &= 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となり比較すると $(x_1, y_1) = (3, 2)$ となるのでこれを $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$ に代入して確かめると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 3^2 - 2 \cdot 2^2 \\
&= 9 - 2 \cdot 4 \\
&= 9 - 8 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となって左辺と右辺が一致したのでペル方程式 $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$ の最小の解 (x_1, y_1) は $(x_1, y_1) = (3, 2)$ であることが確認できた. また次の例として $d = 3$ の場合を紹介する.$d = 3$ のとき $x_n^2 - 3y_n^2 = 1$ の最小の解は $(x_1, y_1) = (2, 1)$ であるのでこれを確認する.

$$
\begin{aligned}
&a_{-1} = \sqrt{3}, a_0 = 1 \\
&a_{n+1} = a_{n-1} + k_n a_n \\
&k_n = [b_n] \\
&b_n = -\frac{a'_{n-1}}{a'_n} \\
&b_{n+1} = \frac{1}{b_n - k_n}
\end{aligned}
$$

ただし n は 0 以上の自然数であり $x_n + \sqrt{d}y_n$ と共役を $x_n - \sqrt{d}y_n$ とする. $[b_n]$ はガウス記号である.

$$
\begin{aligned}
b_0 &= -\frac{-\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\
k_0 &= [b_0] = [\sqrt{3}] = 1 \\
a_1 &= \sqrt{3} + 1 \cdot 1 \\
&= 1 + \sqrt{3} \\
b_1 &= \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \\
&= \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\
&= \frac{\sqrt{3} + 1}{3 - 1} \\
&= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \\
k_1 &= \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\right] = 1 \\
a_2 &= 1 + \sqrt{3} + 1 \\
&= 2 + \sqrt{3} \\
b_2 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3} + 1 - 2} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{3} + 1
\end{aligned}
$$

となるので a_2 が $x_n^2 - 3y_1 n^2 = 1$ に対して最小の解を与える.

$$
x_1 + \sqrt{3}y_1 = (2 + \sqrt{3})
$$

両辺を比較すると $(x_1, y_1) = (2, 1)$ なのでこれを $x_n^2 - \sqrt{3}y_1^2 = 1$ に代入して確かめる.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 2^2 - 3 \cdot 1 \\
&= 4 - 3 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となって左辺と右辺が一致したのでペル方程式 $x_n^2 - 3y_n^2 = 1$ の最小の解 (x_1, y_1) は $(x_1, y_1) = (2, 1)$ であることが確認できた.
次に一般解について調べることにする. $d = 2$ のときを例にとって一般解を調べることにする.$d = 2$ のときの最小の解は $(x_1, y_1) = (3, 2)$ なので

$$
\begin{aligned}
x_2 + \sqrt{2}y_2 &= (3 + 2\sqrt{2})^2 \\
&= 9 + 12\sqrt{2} + 8 \\
&= 17 + 12\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

となるので $(x_2, y_2) = (17, 12)$ と求まる.これを実際に方程式に代入して確認してみると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 17^2 - 2 \cdot 12^2 \\
&= 289 - 144 \cdot 2 = 289 - 288 = 1
\end{aligned}
$$

となって左辺と右辺が一致するでこれは確かにペル方程式 $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$ の 2 番目の解である.さらに 3 番目の解を求めることにすると

$$
\begin{aligned}
x_3 + \sqrt{2}y_3 &= (3 + 2\sqrt{2})^3 \\
&= 27 + 54\sqrt{2} + 72 + 16\sqrt{2} \\
&= 99 + 70\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

となるので $(x_3, y_3) = (99, 70)$ と求まる.これを実際に方程式に代入して確認してみると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 99^2 - 2 \cdot 70^2 \\
&= 9801 - 4900 \cdot 2 = 9801 - 9800 = 1
\end{aligned}
$$

となって左辺と右辺が一致するのでこれは確かにペル方程式 $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$ の 3 番目の解である. このように手順を踏むことによって手計算でもペル方程式の最小解と一般解を求められることがわかった.
また今回は $d = 105$ までの最小の解をプログラムを用いて求めてみた.この解の表については後ろのページに掲載してあるので気になった人はぜひ見てほしい.

4　dが平方数のときは解を持つのか？

「ペル方程式の紹介」のページでは d が平方数でない自然数であるとき, どのような d に対してもペル方程式 $x^2 - dy^2 = 1$ は $(x, y) = (1, 0)$ を解に持つ. d が平方数であるときでもこれは解となる. では d が平方数の時は $(x, y) = (1, 0)$ 以外に解を持つのか, という疑問が生まれる.結論としては d が平方数であるときは解は $(x, y) = (1, 0)$ 以外持たないがこれを証明しよう.

(証明)

ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

が $(x, y) = (1, 0)$ 以外の自然数の解を持たないことを証明する.ただし x, y は正の整数であり,d は平方数の自然数であるとする. このとき (2) の式を変形すると

$$y = \sqrt{\frac{1}{d}(x^2 - 1)}$$

と変形できる. x を 2 以上の整数として $x \geq 2$ のとき y が整数とならないことを示せばよい. このことを数学的帰納法を用いて示すことにする.

(イ)$x = 2$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \sqrt{\frac{1}{d}(2^2 - 1)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{d}}\end{aligned}$$

このとき右辺が整数となるためには $d = 3$ であることが必要だが d が平方数という条件から $d \neq 3$ なので右辺は整数にならないので $x = 2$ のとき成立する.

(ロ)$x = k(\geq 2)$ のとき

$$y = \sqrt{\frac{1}{d}(x^2 - 1)}$$

において y が整数とならないと仮定する.このとき d は平方数という条件から適当な自然数 $D^2 = d$ を用いて

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \sqrt{\frac{k^2 - 1}{d}} \\ &= \sqrt{\frac{k^2 - 1}{D^2}} \\ &= \sqrt{\frac{k^2}{D^2}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)} \\ &= \frac{k}{D}\sqrt{\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}\end{aligned}$$

$x=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \sqrt{\frac{1}{d}(k+1)^2-1}\\ &= \sqrt{\frac{k^2+2k}{d}}\\ &= \sqrt{\frac{k^2}{D^2}\left(1+\frac{2}{k}\right)}\\ &= \frac{k}{D}\sqrt{1+\frac{2}{k}}\end{aligned}$$

このとき $\dfrac{2}{k}$ は $k=2$ のとき $\dfrac{2}{k}=1$ となるが $\sqrt{2}$ は無理数であり, $\sqrt{\left(1+\dfrac{2}{k}\right)}$ は 2 以上の整数 k に対して無理数となるので $n=k+1$ のときも成立する.
(イ)(ロ) より数学的帰納法から d が平方数の自然数のとき, $y=\sqrt{\dfrac{1}{d}\left(x^2-1\right)}$ は無理数となることを証明することができた.
このことから d が平方数の場合は

$$x^2-dy^2=1$$

が $(x,y)=(1,0)$ 以外の正の整数の解を持たないことを証明することができた.

5　一般解から $\sqrt{d}$ の近似値を得る

ここまではペル方程式の解を求めることについて述べてきた．次はペル方程式の解を使った応用例を 1 つ発見したので紹介する．
ペル方程式

$$x_n^2 - dy_n^2 = 1$$

の一般解を (x_n, y_n) とする.このペル方程式の解を用いて $\dfrac{x_n}{y_n}$ を計算することでその解に応じた $\sqrt{d}$ の近似的な値を求めることができる.また n の値を大きくしていくとより正確な近似値を求めることができる.まずは具体的な例を紹介することにする.$d = 2$ としたときの最小解から 3 番目までの解は前のセクションで求めた通り順番に記述していくと $(3, 2), (17, 12), (99, 70)$ となっているこれを用いて計算していく.ここで $\sqrt{2}$ の値は

$$\sqrt{2} = 1.414213562\cdots$$

となっている．まずは 1 番目の近似値から順番に求めていくと

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{y_1} &= \frac{3}{2} = 1.5 \\
\frac{x_2}{y_2} &= \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} = 1 + 0.416\cdots = 1.416\cdots \\
\frac{x_3}{y_3} &= \frac{99}{70} = 1 + \frac{29}{70} = 1 + 0.4142\cdots = 1.4142\cdots
\end{aligned}$$

となり n の値が大きくなっていくほど求められる近似値はより正確になっていくことがわかる．

これが $\dfrac{x_n}{y_n}$ において n を限りなく大きくしていくとより正確な近似的な値を得ることを証明したい.よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{d} \tag{3}$$

となることを証明すれば $\dfrac{x_n}{y_n}$ を計算していくと $\sqrt{d}$ の近似的を得ることができることを証明できるので (3) を証明するために必要なことを順番に証明していくことにする．
ただし, x_n, y_n は自然数, および d は平方数ではない自然数である．まず

$$x_n^2 - dy_n^2 = 1 \tag{4}$$

の全ての解は前のセクションで

$$x_n + \sqrt{d}y_n = (x_1 + \sqrt{d}y_1)^n$$

の両辺を比較することで求まることは述べたのでこれを利用する．上の式において n を $n + 1$ と置き換えて式変形をしていけば

$$\begin{aligned}
x_{n+1} + \sqrt{d}y_{n+1} &= (x_1 + \sqrt{d}y_1)^{n+1} \\
&= (x_1 + \sqrt{d}y_1)^n(x_1 + \sqrt{d}y_1) \\
&= (x_n + \sqrt{d}y_n)(x_1 + \sqrt{d}y_1) \\
&= x_n(x_1 + \sqrt{d}y_1) + \sqrt{d}y_n(x_1 + \sqrt{d}y_1) \\
&= x_1x_n + \sqrt{d}y_1x_n + x_1\sqrt{d}y_n + dy_1y_n \\
x_{n+1} + \sqrt{d}y_{n+1} &= x_1x_n + dy_1y_n + \sqrt{d}(y_1x_n + x_1y_n)
\end{aligned}$$

と x_{n+1} と y_{n+1} は x_n と y_n を用いて表せる．上の式を両辺比較すると連立漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_1 x_n + d y_1 y_n & (5) \\ y_{n+1} = y_1 x_n + x_1 y_n & (6) \end{cases}$$

と表すことができる．ここで x_n, y_n, は自然数で d は平方数ではない自然数であることからこの連立漸化式は解くことができ, この連立漸化式を解くと x_n と y_n の一般項を求めることができる．よってこの連立漸化式を解くことを考えることにする. 実数の定数をそれぞれ p と q とおき

$$x_{n+1} + p y_{n+1} = q(x_n + p y_n) \tag{7}$$

を考える．まず (7) を変形すると

$$x_{n+1} + p y_{n+1} = q x_n + p q y_n$$

また (7) を実際に計算していくと

$$x_{n+1} + p y_{n+1} = (x_1 + p y_1) x_n + (d y_1 + p x_1) y_n \tag{8}$$

と表せる．ここで (7) と (8) から p と q を求めると

$$x_1 + p y_1 = q$$
$$d y_1 + p x_1 = pq$$

の 2 式から p と q を求めると

$$p = \pm\sqrt{d}$$
$$q = x_1 \pm \sqrt{d}$$

ただし復号同順である．よってこれを (7) 式にそれぞれ代入して

$$\begin{cases} x_{n+1} + \sqrt{d} y_{n+1} = (x_1 + \sqrt{d} y_1)(x_n + \sqrt{d} y_n) & (9) \\ x_{n+1} - \sqrt{d} y_{n+1} = (x_1 - \sqrt{d} y_1)(x_n - \sqrt{d} y_n) & (10) \end{cases}$$

ここで

$$e_n = x_n + \sqrt{d} y_n$$
$$f_n = x_n - \sqrt{d} y_n$$

とおくと (9)(10) はそれぞれ

$$\begin{cases} e_{n+1} = (x_1 + \sqrt{d} y_1) e_n & (11) \\ f_{n+1} = (x_1 - \sqrt{d} y_1) f_n & (12) \end{cases}$$

ここで

$$e_1 = x_1 + \sqrt{d} y_1$$
$$f_1 = x_1 - \sqrt{d} y_1$$

であり (11) と (12) はそれぞれ初項 $x_1 + \sqrt{d} y_1$, $x_1 - \sqrt{d} y_1$, 公比 $x_1 + \sqrt{d} y_1$, $x_1 - \sqrt{d} y_1$ の等比数列なので e_n と f_n は

$$\begin{cases} e_n = (x_1 + \sqrt{d} y_1)^n & (13) \\ f_n = (x_1 - \sqrt{d} y_1)^n & (14) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x_n + \sqrt{d}y_n = (x_1 + \sqrt{d}y_1)^n & (15) \\ x_n - \sqrt{d}y_n = (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n & (16) \end{cases}$$

というところまで変形できる．よってそれぞれ (15)+(16) と (15)−(16) を計算すると

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}\left\{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n + (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n\right\} & (17) \\ y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{d}}\left\{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n - (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n\right\} & (18) \end{cases}$$

となったのでペル方程式 $x_n^2 - dy_n^2 = 1$ の一般解は自然数 n の式で表されることがわかった．
次に不等式

$$x_1 + \sqrt{d}y_1 > x_1 - \sqrt{d}y_1 \tag{19}$$

が成立することを示す．左辺から右辺を引いたものを計算すると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (x_1 + \sqrt{d}y_1) - (x_1 - \sqrt{d}y_1) \\ &= 2\sqrt{d}y_1 \end{aligned}$$

ここで d は平方数ではない自然数, および y_1は自然数であるので $d > 1$, $y_1 \geq 1$ となるので

$$2\sqrt{d}y_1 > 1$$

となるから不等式は成立する．ここで (19) 式の両辺を $x_1 + \sqrt{d}y_1$ で割ると

$$1 > \frac{x_1 - \sqrt{d}y_1}{x_1 + \sqrt{d}y_1} \tag{20}$$

となる. よって (20) の不等式を利用すると右辺を n 乗して $n \to \infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_1 - \sqrt{d}y_1}{x_1 + \sqrt{d}y_1}\right)^n = 0 \tag{21}$$

であることを証明できた．よってこれまでに求めた連立漸化式の一般項

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}\left\{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n + (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n\right\} & (22) \\ y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{d}}\left\{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n - (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n\right\} & (23) \end{cases}$$

の式 (22) と (23) 及び極限の式 (21) を用いることで証明したい式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{d}$$

を証明することができる．上の式に (22)(23) を代入する．

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{d}}} \left\{\frac{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n + (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n}{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n - (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n}\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{d} \left\{\frac{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n + (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n}{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n - (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n}\right\} \end{aligned}$$

ここで分母と分子に $\dfrac{1}{(x_1+\sqrt{d}y_1)^n}$ をそれぞれ掛けると

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{d}\left\{\frac{1+\left(\dfrac{x_1-\sqrt{d}y_1}{x_1+\sqrt{d}y_1}\right)^n}{1-\left(\dfrac{x_1-\sqrt{d}y_1}{x_1+\sqrt{d}y_1}\right)^n}\right\}$$

ここで (21) の結果を用いると

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1-\sqrt{d}y_1}{x_1+\sqrt{d}y_1}\right)^n = 0$$

となるので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \sqrt{d}\left(\frac{1+0}{1-0}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \sqrt{d}$$

となったので

$$x_n^2 - dy_n^2 = 1$$

の解を (x_n, y_n) としたときに $\dfrac{x_n}{y_n}$ を計算すると $\sqrt{d}$ の近似値を求めることが証明できた.

6　最小解は規則的 !?

今回はペル方程式の最小解や一般解を求めるプログラムを C 言語により自分作成してペル方程式の解を求めることにした. そのプログラムの出力結果を眺めているうちに今回はペル方程式の全ての最小解は何らかの規則性のもとに構成されているのではと考えた. まずは $d=2$ から $d=13$ までの最小の解についてご覧いただきたい. 最小解は (x_1, y_1) としている.また d が平方数の時は省略して平方数でない場合のみについて記述している. とくに $y_1 = 1$ の場合に着目すると

d	(x_1, y_1)
2	(3,2)
3	(2,1)
5	(9,4)
6	(5,2)
7	(8,3)
8	(3,1)
10	(19,6)
11	(10,3)
12	(7,2)
13	(649,180)

となっていることがわかる. これの x_1 と d に着目すると x_1 と d は規則性を持っており自然数 n を用いると数列

$$\begin{cases} x_1 = n+1 & (24) \\ d = n(n+2) & (25) \end{cases}$$

x_1	y_1	d
2	1	3
3	1	8
4	1	15
5	1	24
6	1	35
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

で表されることがわかる．今回は階差数列の導出をいちいち示していくのは見ていくのも退屈だろうと思い省略した．今回は $y_1=1$ の場合に限らずすべての階差数列の計算は私個人のそこは重要ではないだろうという思いと TeX として入力する手間を省くためという事 (紹介する全ての y_1に対して計算を入力するのは非常に手間がかかる) から省略しているがご理解願いたい．x_1と d が上記の数列で表され $y=1$ の場合にペル方程式が成立するのかを確認することにする．
ペル方程式の最小解を自然数 x_1, y_1とし d は平方数ではない自然数とすると

$$x_1^2-dy_1^2=1$$

の関係を満たすので計算を簡単にするために上の式を変形すると

$$y_1^2=\frac{1}{d}(x_1^2-1) \tag{26}$$

と変形できる．このとき自然数 n を用いて

$$\begin{cases} x_1=n+1 & (27)\\ y_1=1 & (28)\\ d=n(n+2) & (29)\end{cases}$$

で表されることを示せばよい．上の式を代入してときに y_1=1 なので右辺を計算して左辺と一致すればよい．このことを数学的帰納法を用いて証明することにする．(i)$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{1\cdot 3}(2^2-1)\\&=\frac{1}{3}\cdot 3\\&=1\end{aligned}$$

となるので $n=1$ の時は成立する．
(ii)$n=k(\geq 1)$ のとき証明する式が成立することを仮定すると

$$(\text{右辺})=\frac{1}{k(k+2)}\{(k+1)^2-1\}$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{(k+1)(k+3)}\left\{(k+2)^2-1\right\}\\&=\frac{1}{(k+1)(k+3)}(k^2+4k+3)\\&=\frac{1}{k^2+4k+3}(k^2+4k+3)\\&=1\end{aligned}$$

となるので $n=k+1$ のときでも成立する.よって(i)(ii) より数学的帰納法を用いて

$$x_1^2 - dy_1^2 = 1$$

を満たす式が自然数 n を用いて

$$\begin{cases} x_1 = n+1 & (30) \\ y_1 = 1 & (31) \\ d = n(n+2) & (32) \end{cases}$$

で表されることを証明することができた. よって $y_1 = 1$ のときは残りの x_1, d はある規則性のもとに成り立っていることがわかった. これと同様に $y_1 = 2$ 場合も見てみよう.

x_1	y_1	d
3	2	2
5	2	6
7	2	12
9	2	20
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$y_1 = 2$ のときも $y_1 = 1$ の場合と同じように x_1と d は自然数 n を用いた数列で表すことができてその式は

$$\begin{cases} x_1 = 2n+1 & (33) \\ y_1 = 2 & (34) \\ d = n(n+1) & (35) \end{cases}$$

となっている. $y_1 = 2$ の場合の証明は $y_1 = 1$ の場合と同様に数学的帰納法を用いて証明すればよいので省略する.
また同様に $y_1 = 3$ の場合も考えてみると $y_1 = 3$ のときの x_1と d の値は以下のようになって

x_1	y_1	d
8	3	7
10	3	11
17	3	32
19	3	40
26	3	75
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

となっているので y_1の値が大きくなると規則性は複雑になっていくがやはり自然数 n と m を用いれば x_1 と d はそれぞれ数列

$$\begin{aligned} x_{1(2n-1)} &= 9(n-1)+8 \\ x_{1(2n)} &= 9n+1 \\ y_1 &= 3 \\ d_{(2n-1)} &= 9(n-1)^2 + 16(n-1) + 7 \\ d_{(2n)} &= 9n^2 + 2n \end{aligned}$$

と表すことができる．次に少し y_1の値を大きくして $y_1 = 20$ の場合を考えてみることにする.$y_1 = 20$ としたときの x_1と d の値の表は下のようになる.

x_1	y_1	d
49	20	6
151	20	57
199	20	99
201	20	101
249	20	155
351	20	308
399	20	398
401	20	402
449	20	504
551	20	759
599	20	897
⋮	⋮	⋮

となっていて規則性があるかどうかはわからないように見えるが, これもやはり階差数列となっていて自然数 n, m を用いて x_1と d の一般項を表してやると

$$
\begin{aligned}
x_{1(4n-3)} &= 200(n-1)+49 \\
x_{1(4n-2)} &= 200n-49 \\
x_{1(4n-1)} &= 200n-1 \\
x_{1(4n)} &= 200n+1 \\
y_1 &= 20 \\
d_{(4n-3)} &= 100(n-1)^2-49(n-1)+6 \\
d_{(4n-2)} &= 100n^2-n \\
d_{(4n-1)} &= 100n^2+n \\
d_{(4n)} &= 100n^2+49n+6
\end{aligned}
$$

と表すことができる．これらもやはり代入して確かめれば確かに方程式を満たすのでこれはペル方程式の最小解になっている.
今回の研究ではコンピューターの処理能力などの制限から全ての y_1 に対して規則性があるのかどうかを発見することはできなかった．また y_1 の値が大きくなるとさらに規則性は複雑になってしまうことなどもあり規則性を持つことの証明をすることができなかった．しかし今回紹介したすべての事例では x_1 は n の 1 次式, d は n の 2 次式で表されることまでは予想することができた．私個人的はこれだけでも非常に面白いと感じた.

7 課題と反省点

今回の研究では主にペル方程式の解についての研究に注力をしたので他の性質などについても詳しく調べていき, ペル方程式全体についての研究として完成させることができればと思った. またペル方程式の解を求める方法の中には連分数展開という方法を用いることができるが, 今回はそこまで至らなかったのでそこまで学びを進めこの研究に再戦することがあれば前の規則性も含めて完成度の高いものにしたいと思った.
また今回自分で作成して使用したプログラムについては計算効率があまり良くないものになってしまったので数学の勉強だけではなくて, プログラムについてもきちんと学んでより計算処理能力を高くして計算を実行できるようなプログラムを作成できるように頑張りたいと思う. また今回は普通のコンピュータに計算させたので処理速度は高くなかったがぜひ使用する機会ができたならばより性能の高い計算機を使用して計算させたいと思っている.

8 作成して使用したプログラム

以下のプログラムは C 言語を利用して作成し, 今回の研究で使用したプログラムである. 開発環境は windows8 なので windows ならば正常に動作すると思われる. ただし計算処理をするために CPU などに負担を掛けるので注意されたい.

```
#include<stdio.h>
int ixtupan(void);
int saisixyou(void);
int ixtupan(void)
{
int n=1;
unsigned long long int d,x,y;
printf("ペル方程式 x^2-dy^2=1 の自然数解を求めます.\n");
printf("d の値を入力してください.\n");
scanf("%lld",&d);
for(x=1;x<=100000000;x++)
{
for(y=1;y<=100000000;y++)
{
if(x*x-d*y*y==1)
{
if(x>y)
{
printf("入力された d=%lld に対する%d 個目の自然数解は (x,y)=(%lld,%lld)\n",d,n,x,y);
n++;
FILE *file;
file = fopen("ファイル名.csv","a");
fprintf(file,"%d,%d\n",x,y);
fclose(file);
}
}
```

```
}
}
return 0;
}
int saisixyou(void)
{
int a,b,d;
unsigned long long int x,y;
printf("どこまでの一番小さい解を求めるか自然数を入力してください.\n");
scanf("%d",&a);
for(d=1;d<=a;d++)
{
b=1;
for(x=1;x<=10000;x++)
{
for(y=1;y<=10000;y++)
{
if(x*x-d*y*y==1)
{
if(b==1)
{
printf("d=%d の時の最小解は (x,y)=(%lld,%lld)\n",d,x,y);
b++;
FILE *file;
file = fopen("ファイル名.txt","a");
fprintf(file,"%d,%d,%d\n",x,y,d);
fclose(file);
}
}
}
}
}
return 0;
}
int main(void)
{
int s;
printf("ペル方程式についてどちらの操作を実行するかを入力してください。\n コマンド?(1=一般解を
求める、2=最小解を求める)\n");
scanf("%d",&s);
if(s==1) ixtupan();
else if(s==2) saisixyou();
return 0;
}
```

9　参考文献 (Special Thanks)

[1] 高木貞治, 初等整数論講義, 共立出版株式会社, 初版 1931 年

[2] 私の備忘録, `http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/pell/pell.htm` 2015 年 8 月 29 日に初回アクセス

[3] 高校数学の美しい物語, `http://mathtrain.jp/` 2015 年 8 月 30 日に初回アクセス

10　付録：$d = 105$ までの最小解のリスト

最小解のリストについては分量が多くなってしまっているために次のページに掲載している．ご確認いただきたい．また最小解の分布グラフについては $d = 50$ までである．

図 1: グラフ

d	(x,y)	d	(x,y)	d	(x,y)
1	False	36	False	71	(3480,413)
2	(3,2)	37	(73,12)	72	(17,2)
3	(2,1)	38	(37,6)	73	(2281249,267000)
4	False	39	(25,4)	74	(3649,430)
5	(9,4)	40	(19,3)	75	(26,3)
6	(5,2)	41	(2049,320)	76	(57799,6630)
7	(8,3)	42	(13,2)	77	(351,40)
8	(3,1)	43	(3482,531)	78	(53,6)
9	False	44	(199,30)	79	(80,9)
10	(19,6)	45	(161,24)	80	(9,1)
11	(10,3)	46	(24335,3588)	81	False
12	(7,2)	47	(48,7)	82	(163,18)
13	(649,180)	48	(7,1)	83	(82,9)
14	(15,4)	49	False	84	(55,6)
15	(4,1)	50	(99,14)	85	(285769,90996)
16	False	51	(56,7)	86	(10405,1122)
17	(33,8)	52	(649,70)	87	(28,5)
18	(17,4)	53	(66249,9100)	88	(197,21)
19	(170,39)	54	(486,66)	89	(500001,53000)
20	(9,2)	55	(89,12)	90	(19,2)
21	(55,12)	56	(15,2)	91	(1574,165)
22	(197,42)	57	(151,20)	92	(1151,120)
23	(24,5)	58	(19603,2574)	93	(12151,1260)
24	(5,1)	59	(530,69)	94	(9187426914049,947610731760)
25	False	60	(31,4)	95	(39,4)
26	(51,10)	61	(1766319049,226153980)	96	(49,5)
27	(26,5)	62	(63,8)	97	(62809633,6377352)
28	(127,24)	63	(8,1)	98	(99,10)
29	(9801,1820)	64	False	99	(10,1)
30	(11,2)	65	(129,16)	100	False
31	(1520,273)	66	(65,8)	101	(201,20)
32	(17,3)	67	(48842,5967)	102	(101,10)
33	(23,4)	68	(33,4)	103	(103537981567,10201900464)
34	(35,6)	69	(7775,936)	104	(51,5)
35	(6,1)	70	(251,30)	105	(41,4)