確率過程とその応用

芝浦工業大学　数理科学研究会
阿部大紘

2015 年 11 月 6 日

1　研究背景

社会現象を確率論の考えを導入して記述できることに興味をもった.

2　確率過程とは

確率過程とは, 複雑な要因や偶発的原因がからまって引き起こされる, 予想しがたい不規則な変動確率モデルである. 確率過程で記述される現象には,

- 人口の変化の様子
- ウイルスの感染の様子
- 店の入客の様子

などが挙げられる. 本来であれば, まず確率過程を構成する集合について述べる必要があるが, 紙面の関係上, 補足資料にまとめたので参照してほしい.

3　ランダムウォーク

定義　$\xi_j (j = 1, 2, \cdots)$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の独立確率変数列で, その確率を

$$P(\xi_j = 1) = p, \qquad P(\xi_j = -1) = 1 - p \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

とする. ただし, $0 < p < 1$ とする. このとき,

$$S_x(0) := x\ (\in \mathbb{Z}), \quad S_x(n) := x + \xi_1 + \cdots + \xi_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で与えられる $\boldsymbol{S}_x = \{S_x(n), n \in \mathbb{Z}_+\}$ を, x から出発したランダムウォークとよぶ.

ランダムウォークは, 離散時間確率過程の一種で, 統計力学, 量子力学, 数理ファイナンス等の確率モデルに応用されている. 具体的には, コイン投げの試行もモデルや, 今日の株価の変動のモデルの根幹をなす. また, 宇宙空間の星の分布のモデルも記述できるらしい (レビのダストモデルとよばれているらしい).

4　ブラウン運動

定義　$\boldsymbol{T}$=[0, ∞) とする.　1 次元確率過程 $\boldsymbol{B} = \{B(t), t \in \boldsymbol{T}\}$ がブラウン運動であるとは, 以下の条件を満たすことをいう.
(a) $B(0) = 0$
(b) 任意の $s < t$ に対し, $B(t) - B(s)$ が $\{B(\theta), \theta \leq s\}$ と独立で, かつその分布が $N(0, t - s)$ に従う.

ブラウン運動は, 連続時間確率過程の一種で, 物理学や化学の分野で盛んに用いられている. ブラウン運動は,1905 年にアインシュタインが発表した論文によって, 原子の存在を明白に証明する材料になった.

5　確率制御理論

近年研究が進んでいる確率制御理論について述べる. これは確率微分方程式に従うランダムな運動を, 目的に添うように制御することを目標としている. 例えば, 加速度の値を [−1, 1] の中から適当に選んで原点に最小時間で到達するには, どのように選べばよいのかという問題である. この場合は, 時刻 t において, 加速度 $u(t) \in [-1, 1]$ を選択すれば, 位置 $x(t)$ と速度 $y(t)$ に対して, 微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = y(t), \qquad \frac{d}{dt}y(t) = u(t)$$

に従うので, $x(t) = 0, y(t) = 0$ となる t が最小となるような u を選ぶ問題に帰着される. 確率制御理論とは, ブラウン運動のような外力が加わる場合の制御をいう.

6　今後の課題

ポアソン過程や待ち行列理論などを研究してみたい.

7　参考文献

[1] 確率過程入門, 2006, 培風館