コラッツ予想について

芝浦工業大学　数理科学研究会
久保田一次

平成 27 年 11 月 6 日

1　研究背景

数論の未解決問題の一つである. アルゴリズムの基本構造は単純であり, プログラムで再現することは容易である. 実際にプログラムにして視覚的に観察した際, 多少興味深い結果が得られた. 様々なプログラムを用いてこの問題に対してアプローチを行い, コラッツ予想を考えていきたい.

2　コラッツ予想とは

1937 年に Lothar Collatz が提唱した問題で, 未解決問題の一つである.

任意の自然数 n に対し, 以下のどちらかの操作を行う.

- n が偶数なら 2 で割る.
- n が奇数なら 3 をかけて 1 を足す.

このとき求まった数を新しく n とし, 再度新たな n に対して同様の操作を行う.
以上の操作を繰り返すことで有限回の操作のうちに必ず 1 に到達することを示せ.

という証明問題である. 実際に 7 に対してこの操作を繰り返した結果を下記に示す.

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

3　コラッツ予想と同値な条件

コラッツ予想が成り立つことは, 以下のいずれかの条件が成り立つことと同値である.

- 2 以上の任意の自然数に対し, コラッツ操作を繰り返すことで, 有限回の操作で必ず初期値未満になる.
- 任意の自然数に対するコラッツ列のうち, 1 を含まない巡回列と無限大発散列は存在しない.

※コラッツ列, 巡回列及び無限大発散列の定義は資料に記載.

4　調査結果

コラッツ操作を行いたい数に対して, その数を 2 進数で表すことで, コラッツ操作における短期的な増減の流れを容易に想像できる.

- 最も小さい桁が 0 のとき, そこから連続する 0 の個数を t とし, t 回減少操作を行う.
- 最も小さい桁が 1 のとき, そこから連続する 1 の個数を t とし, t 回増加操作と減少操作を交互に繰り返す.

また増加操作と減少操作を交互に繰り返すことが分かっている場合, 多少計算を簡略化出来る.

$$n \text{ は最小桁数から } t \text{ 個 } 1 \text{ が続いてる} \quad \Rightarrow n^{(2t)} = \left(\frac{3}{2}\right)^t (k+1) - 1 \ .$$

※ $n^{(2t)}$ とは n に対して $2t$ 回コラッツ操作を繰り返すこと.

この結果を用いることでコラッツ予想に関係する新たなアルゴリズムを組める.

任意の自然数 n に対し, 初期状態を 0 とし, 以下の当てはまる操作を行う.

- 状態が0で n が偶数なら 2 で割る.
- 状態が0で n が奇数なら 1 を足し, 状態を 1 にする.
- 状態が1で n が偶数なら $\frac{3}{2}$ をかける.
- 状態が1で n が奇数なら 1 を引き, 状態を 0 にする.

以上のアルゴリズムを繰り返すことで, 有限回の操作のうちに状態が 0 で値が 1 に到達するならば, コラッツ予想を成り立つといえる.

5　今後の課題

今回証明には至らなかったが, 前回の大宮祭の内容よりも 2 進数に対するアプローチを深めることで, 幾つかおもしろい発見や考え方などが生まれた. 今後の課題としては, 短期的な増減の流れだけでなく, それ以降の動きに対してどのように対応するのかを考える方法を模索したい.

6　参考文献

[1]　Richard K. Guy, 金光滋, 数論 < 未解決問題 > の辞典, 朝倉書店, 2010.
[2]　太田悠暉, コラッツ問題にぶつかりましたっ(仮), `http://sitmathclub.web.fc2.com/seisaku/collatz-04-18-2.pdf`, 2015/10/18.