神経細胞の活動電位に関する反応拡散方程式について

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV14045 長瀬准平

平成 27 年 11 月 6 日

1　研究背景

先日, FitzHugh-Nagumo(フィッツヒューナグモ) 方程式という単語を耳にする機会があった．しかし浅学であった私はその単語が呪文にしか聞こえなかった．どうやらそれは反応拡散方程式という呪文と関わりがあるらしい．初の反応拡散方程式入門書が刊行されたこともあり, 以前から現象数理学に興味を持っていた私はこの呪文の解明に取り掛かることに決めた．

2　反応拡散方程式とは

放物型非線形偏微分方程式と呼ばれる偏微分方程式の一種で, 反応現象を表す項と拡散現象を表す項から成る．拡散は解を滑らかに一様化あるいは平均化する効果をもち, 方程式の解が明らかになる方向に働く．それに対し反応項は解が安定している状態から引き離して空間的な非一様性をもたらすような働きをもつ．拡散と反応のこのような効果により, 反応拡散方程式はなめらかな空間パターンを安定に形成する．成分が一つだけである反応拡散方程式 $u_t = \Delta u + f(u)$ ですら, 豊富な数学構造を持っている．それだけでなく, 反応と拡散という二つの現象によって説明できる現象は数多く存在する[*1]．そのような理由から近年研究が盛んになっている応用系数学の一分野である．

3　FitzHugh-Nagumo 方程式

神経細胞を伝わる電気信号の過程を実験的に表現した Hodgkin-Huxley 方程式[*2]の本質を残したまま, 数学的に解析し易い形に簡単化したモデルである．Richard FitzHugh(1922-2007) と南雲仁一 (1926-1999) により導かれた．神経に関する多くの現象を表現できる優秀なモデルであり, 多くの研究がなされている．

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + h(u) - v \\ v_t = \varepsilon(u - \gamma v) \end{cases}$$

t :時間	x :神経に沿っての距離
u :神経細胞の電位	v :神経膜の状態

3.1　自明解の性質と考察 (神経が興奮する現象の説明)

$t \to \infty$ のときすべての解は原点に収束する．初期値が原点の近傍にあれば軌道はその近くに留まって収束するのに対し, $(a, 0)$

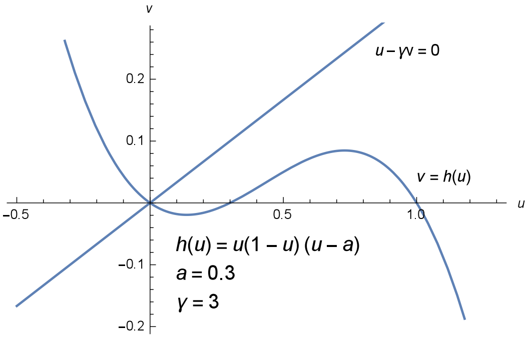

図 1　反応方程式の自明解の軌道

の右側では外側に大きな軌道を描いた後に原点に収束する．この結果は, 神経は小さな刺激に反応しないがある臨界値より大きい刺激で興奮するという特徴をモデル化できている．また興奮した後にはその臨界値が大きくなるという実験結果があるが, それも自明解の軌道から説明できる．

3.2　パルス進行波解の性質と考察 (神経が伝播する現象の説明)

神経細胞が興奮すると電気信号が軸索を伝播する．この電気信号は数学的にはパルス進行波解で説明できる．その解の性質を観察することでパルス信号を理解することができる．実際に FitzHugh-Nagumo 方程式にパルス進行波解が存在することは数値計算を用いて示される．数値計算によると, 解の進行する速度が速く安定しているパルス解と遅く不安定なパルス解の二つが存在することがわかる．

この結果を深く分析すると, 小さな刺激で電気信号は発生しないが, 大きな刺激によって一度発生した電気信号は情報を安定して他の神経細胞に伝播・伝達できるということが明らかになる．つまり小さな刺激では電気信号の情報が失われないということであり, 神経繊維が理想的な信号伝送回路となっていることを数学的に保証している．

4　今後の課題

今回は自分の勉強で終わってしまい, 新規性を創出できなかった．今後は反応拡散方程式を用いて実際に数理モデルを構築したい．また, 証明の多くが海外の論文などに任されており, 証明を飛ばしてしまった部分が大半である．次からは海外の論文も実際に読んで証明を追いたい．

5　参考文献

[1] 柳田英二, 反応拡散方程式, 東京大学出版会, 2015 年.

[*1] 化学反応, 発熱反応, 伝染病などなど
[*2] 資料を参照されたし