ジョルダン標準形

芝浦工業大学　数理科学研究会
長田祐輝

平成 27 年 11 月 6 日

1　研究動機

1 年生の線形代数 II の授業や 2 年生の関数方程式論 I の授業でところどころ顔を見せていたジョルダン標準形について調べたくなった. 具体的には, 与えられた行列に対してどのようにしてジョルダン標準形を求めるのか, そしてその理論を調べたくなった.

2　ジョルダン細胞

定義 2.1 (ジョルダン細胞) サイズ n の次のような行列をジョルダン細胞という.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$$

この行列を $J(a, n)$ で表す.

3　ジョルダン標準形

定義 3.1 (ジョルダン標準形) 次のような行列をジョルダン標準形という.

$$\begin{bmatrix} J(\lambda_1, n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_s, n_s) \end{bmatrix}$$

ただし, $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{C}$, $n_1, \cdots, n_s \in \mathbb{N}$ である. 空白部分は 0 が入っているものとする.

4　応用例

連立の定数係数の線形微分方程式に使われる.
例えば, x を t を変数とする, n 個の関数を成分とするベクトル値関数とする. A を n 次正方行列とする. このとき連立微分方程式 $Ax = 0$ を解くことを考える. もし A が対角化可能なら, すぐに解を得ることが出来る. しかし A が対角化可能でなくても, A をジョルダン標準形にすれば, 解を得ることが出来る.

5　今後の課題

今回, 私は全ての行列に対して, その行列のジョルダン標準形が求められることを証明できていないので, その証明をしてみたい.

6　参考文献

[1] 西山享, 重点解説ジョルダン標準形　行列の標準形と分解をめぐって, 数理科学編集部, 2010.
[2] 千葉克裕, 行列の関数とジョルダン標準形【増補改訂版】, サイエンティスト社, 2010.
[3] ときわ台学/固有値論/一般固有空間，ジョルダン標準形, `http://f-denshi.com/000TokiwaJPN/05unitr/110unt.html`, 2015/10/03.