ペル方程式

芝浦工業大学　数理科学研究会
澤崎航輔

平成 27 年 11 月 6 日

1　研究背景

大学受験勉強中に「ペル方程式」をテーマとした解けない問題があり, かつ個人的に特異な名前の方程式だったので記憶に焼き付いていた. また, 整数に少し興味があったので良い勉強と思い研究することにした.

2　概論

ペル方程式とは (x, y) に自然数, 整数など条件を付けて, d を平方数ではない自然数としたときに

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{1}$$

の解の組 (x, y) を求める問題である. もとはフェルマーが知人の数学者に

$$x^2 - 61y^2 = 1$$

の自然数解の組 (x, y) を求めるように言ったのが始まりだといわれている. ちなみに上の方程式の最小の解は

$$(x, y) = (1766319049, 226153980)$$

である.

3　ペル方程式の最小解と一般解

(1) の一般解を求めるには

$$x + \sqrt{d}y \quad (> 1)$$

を最小にする解の組 (x, y) を見つける必要がある. しかしこの最小の解は d の値によっては見つけるのが難しいがある漸化式を用いるとうまく求まる. また, ペル方程式の一般解は (1) の最小解を $(x, y) = (x_1, y_1)$ とすると n 個目の解 (x_n, y_n) は

$$x_n + \sqrt{d}y_n = (x_1 + \sqrt{d}y_1)^n \tag{2}$$

で与えられる. また (2) 式を変形していくと x_n と y_n は x_1, y_1, d, n を用いて

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}\left\{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n + (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n\right\} & (3) \\ y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{d}}\left\{(x_1 + \sqrt{d}y_1)^n - (x_1 - \sqrt{d}y_1)^n\right\} & (4) \end{cases}$$

と表せる.

4　結果と発見したこと

今回の研究では最小の解や一般の解を求めるプログラムを自分で作成し, それを用いることでペル方程式の解を求めていくことができた. その結果として主に 2 つのことを発見することができた.

4.1　発見したこと

ペル方程式 (1) に対して最小の解となる (x, y) を (X, Y) とおいてその時の d を $d = D$ とおくと

$$X^2 - DY^2 = 1$$

の 3 つの数の組 (X, Y, D) はある規則性を持つことがわかった. また y_1 の値が大きくなるにつれて規則性はより複雑になっていくこともわかった. しかし Y がどのような数でも, ペル方程式の最小の解はすべてある規則性の下で構成されているのではと考えた.

また (x_n, y_n) がペル方程式の解の時 $\dfrac{x_n}{y_n}$ は $\sqrt{d}$ の近似値となることもわかった. この近似値は (2) 式の n が大きいほどより正確な近似値を求められる. また (2) 式を用いていくことで一般の解は n の式で表すことができる.

5　課題

今後の課題としてペル方程式の解だけではなく, よりペル方程式を踏み込んで調べてみたいと思った. まだまだ整数分野に対しては勉強不足なところが多いのでしっかりと勉強したうえで改めて見つめなおしてみたい.
まだ連分数の応用を用いて連分数展開をすることでも最小解が求まることがわかっているので整数分野だけでなく, 連分数展開を用いて最小解を求める方法も実践してみたい.

6　参考文献 (Special Thanks)

[1] 高木貞治, 初等整数論講義, 共立出版株式会社, 初版 1931 年
[2] 私の備忘録, `http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/pell/pell.htm` 2015 年 8 月 29 日に初回アクセス
[3] 高校数学の美しい物語, `http://mathtrain.jp/` 2015 年 8 月 30 日に初回アクセス