ベルトラン-チェブィショフの定理

芝浦工業大学　数理科学研究会

平成 28 年 5 月 22 日

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

制作: BV15005 石川直幹

目 次

1 ベルトラン-チェビィショフの定理 **1**

1.1 基本的な事柄 1

1.2 関数の導入 2

1.3 ベルトラン-チェビィショフの定理の証明 3

2 参考文献 **13**

1　ベルトラン-チェビィショフの定理

1.1　基本的な事柄

念のため, 素数についての基本的な事柄を書いておく.

定理 1.1 合成数を素数の積に分解することができる. かつその分解の結果はただ一通りである.

(証明)
最小の合成数 $4 = 2 \times 2$ のとき, 成り立つ.
a よりも小さい合成数のとき, 成り立つと仮定する.
分解の可能性については, a のときを考えると, a は合成数であるから, $a = bc,\ 1 < b < a,\ 1 < c < a$ になるような $b,\ c$ がある. b も c も素数であるか, または仮定のよって素数の積に分解されるから, a(も同様である.) は素数の積に分解される.
分解の一意性については, a の素因数に分解して

$$a = pp'p'',\ \ldots = qq'q'',\ \ldots$$

を得たとすれば, $pp'p'' \ldots$ が素数 q で割り切れるから, $p,\ p',\ p'',\ \ldots$ の中に q で割り切れるのもがある (定理 1.8). いま p が q で割り切れるとすれば p が素数であるから, $p = q$. よって

$$p'p'' \ldots = q'q'' \ldots$$

これを繰り返せば, $p' = q',\ p'' = q'',\ \ldots$ となるから, 二つの分解は (合致) 一致する.
以上より, 数学的帰納法を用いて, すべての自然数について, 成り立つ.

Q.E.D.

例として, $n \geq 2$ のとき, $n!$ の標準形

$$n! = \prod_{p \leq n} p^{e_p} \tag{1}$$

を求める. 明らかに, $n!$ は素因数として n 以下の素数 p をすべて含み n を超えるものは含まない.

$$e_p = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^r} \right] \tag{2}$$

見かけ上, 無限和の形に表されているが, この和は, $p^r > n$ に対しては $[\frac{n}{p^r}] = 0$ であるので実質的に有限和である.

定理 1.2 素数は無数にある.

(証明)
素数の数が有限 (n 個) であると仮定する. つまり, 素数を $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする. そして,

$$a = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$$

を考えると, a は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどの素数によっても割り切ることができないので, a が $n + 1$ 個目の素数となり, 仮定に矛盾する.

Q.E.D.

1.2　関数の導入

マンゴルトの関数は以下によって定義される.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p \ (n = p^a,\ a > 0) \\ 0 \ (n \neq p^a,\ a > 0) \\ 0 \ (n = 1) \end{cases}$$

例えば, $\Lambda(2) = \log 2,\ \Lambda(4) = \log 2,\ \Lambda(6) = 0.$

チェブェショフに従って二つの関数 $\vartheta(x),\ \psi(x)$ をそれぞれ以下のように定義する.

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad (x \geq 1),$$
$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad (x \geq 1)$$

例えば, $\vartheta(1) = 0,\ \vartheta(2) = \log 2,\ \vartheta(4) = \log 2 + \log 3,\ \psi(2) = \log 2,\ \psi(3) = \log 2,\ \psi(4) = 2 \log 2.$

$\Lambda(n)$ の定義より, $p_1 < \ldots < p_k$ とすると,

$$\begin{aligned} \psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p &= m_1 \log p_1 \quad (p_1^{m_1} \leq x) \\ &\vdots \\ &= m_k \log p_k \quad (p_k^{m_k} \leq x) \end{aligned}$$

となるので,

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p \tag{3}$$

と書くことができる.
これにより,

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta\left(x^{\frac{1}{m}}\right) \tag{4}$$

であることがわかる. この右辺の和は, 実質上, 有限和である.

$$x^{\frac{1}{m}} < 2$$

すなわち,

$$m > \frac{\log x}{\log 2}$$

ならば

$$\vartheta\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = 0$$

となるからである.

1.3　ベルトラン-チェブィショフの定理の証明

補題 1.3

$$2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{n!} = (n+1) \cdot \ldots \cdot 2n$$

(証明)

$n = 1$ のとき, 成り立つ.
$n = k$ のとき,

$$2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1) = \frac{(2k)!}{k!}$$

が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k+1) &= \frac{(2k)!}{k!} \cdot 2 \cdot (2k+1) = \frac{(2k+1)!}{k!} \cdot 2 \\ &= \frac{(2k+1)!}{k!} \cdot 2 \cdot \frac{k+1}{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!} \end{aligned}$$

となり, $n = n+1$ のときも成り立つ.
以上のことから, 数学的帰納法により,

$$2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{n!} = (n+1) \cdot \ldots \cdot 2n$$

がすべての自然数により成り立つ.

Q.E.D.

補題 1.4

$$\sum_{n \le x} \log n - 2 \sum_{n \le \frac{x}{2}} \log n = (2 \log 2) \left[\frac{x}{2}\right] + \sum_{n \le x} (-1)^{n-1} \log n$$

(証明)

$$\sum_{n \le x} \log n - 2 \sum_{n \le x} \log n = \log \frac{(\left[\frac{x}{2}\right] + 1) \cdot \ldots \cdot [x]}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left[\frac{x}{2}\right]}$$

であり, $[x] = 2m$ $(m \in \mathbb{N})$ とすると, $\left[\frac{x}{2}\right]$ と $\frac{1}{2}[x]$ は同じ自然数 m に対応する.

$$\begin{aligned} (2 \log 2) \left[\frac{x}{2}\right] + \sum_{n \le x} (-1)^{n-1} \log n &= \log \left(2^{2\left[\frac{x}{2}\right]} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot ([x]-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot [x]} \right) \\ &= \log \left(2^{2m} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2m} \right) \end{aligned}$$

4 で二つ, 6 以降で一つずつ 2 を払うと,

$$\log \left(2^m \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m} \right)$$

となり, 補題 1.3 より,

$$2^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-1) = (m+1) \cdot \ldots \cdot 2n$$

となる. これは $[x] = 2m+1$ のときも, 同様である ($(2m+1)$ がうしろに付くだけである).
よって,

$$\sum_{n \le x} \log n - 2 \sum_{n \le \frac{x}{2}} \log n = (2 \log 2) \left[\frac{x}{2}\right] + \sum_{n \le x} (-1)^{n-1} \log n$$

が成り立つ.

Q.E.D.

定理 1.5 任意の実数 $\frac{7}{2} \leq t$ に対して, $t < p \leq 2t - 2$ を満たす素数 p が存在する.

もし定理 1.5 がいえたならば,

定理 1.6 (ベルトラン-チェビシェフの定理) 任意の自然数に対して, $n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在する.

が直ちにいえる.
(証明)

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \quad (x \geq 1)$$

とおく.

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{n}} \Lambda(m) \\ &= \sum_{m \leq \frac{x}{1}} \Lambda(m) + \sum_{m \leq \frac{x}{2}} \Lambda(m) + \ldots + \sum_{m \leq \frac{x}{x}} \Lambda(m) \end{aligned}$$

となるので, 上の (3) と同様に,

$$T(x) = \sum_{m \leq x} \left[\frac{x}{m}\right] \Lambda(m)$$

である.
また, $x \geq 2$ ならば, (1) より,

$$\sum_{n \leq x} \log n = \log[x]! = \sum_{p \leq x} e_p \log p$$

また, $p^m \leq x$ のとき, $\left[\frac{x}{p_k^m}\right]$ は 0 にならないので,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \sum_{m \geq 1} \left[\frac{x}{p^m}\right] = &\left[\frac{x}{p_1}\right] + \left[\frac{x}{p_1^2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{p_1^m}\right] + \ldots \\ &+ \left[\frac{x}{p_2}\right] + \left[\frac{x}{p_2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{p_2^m}\right] + \ldots \\ &\vdots \\ &+ \left[\frac{x}{p_k}\right] + \left[\frac{x}{p_k^2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{p_k^m}\right] + \ldots \end{aligned}$$

よって,

$$\sum_{n \leq x} \log n = \sum_{p^m \leq x} \left[\frac{x}{p^m}\right] \log p = \sum_{n \leq x} \left[\frac{x}{n}\right] \Lambda(n)$$

であり,

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n \tag{5}$$

であるが, これは明らかに $1 \leq x < 2$ に対しても成り立つ.

つぎに

$$U(x) = T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n \le x} (-1)^{n-1} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

とおけば, $\psi(x)$ は x の単調増加関数であるから

$$\left(\psi\left(\frac{x}{5}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{6}\right)\right) + \ldots < 0$$

となり,

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \le U(x) \le \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right)$$

すなわち

$$U(x) = \psi\left(\frac{x}{3}\right) \le \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \le U(x) \quad (x \ge 3) \tag{6}$$

である. 一方, (4) から

$$\psi(x) - 2\psi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \vartheta\left(x^{\frac{1}{m}}\right) \le \vartheta(x) \le \psi(x).$$

故に

$$\vartheta(x) - \vartheta\left(\frac{x}{2}\right) \ge \psi(x) - 2\psi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \tag{7}$$

$$\ge U(x) - \psi\left(\frac{x}{3}\right) - 2\psi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \quad (x \ge 3) \tag{8}$$

をえる. また, (5), 補題 1.4 より,

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n \le x} \log n - 2 \sum_{n \le \frac{x}{2}} \log n \\ &= (2\log 2)\left[\frac{x}{2}\right] + \sum_{n \le x} (-1)^{n-1} \log n \end{aligned}$$

を得る. さらに, $\log x$ が x の単調増加関数であり,

$$\begin{aligned} (\log 2)\left(2\left[\frac{x}{2}\right] - (x-2)\right) &\ge 0, \\ \log x - \sum_{n \le x} (-1)^{n-1} \log n &= (\log 2 - \log 1) + (\log 4 - \log 3) + \ldots \\ &\quad + (\log([x]-1) - \log([x]-2)) + (\log x - \log[x]) \ge 0 \end{aligned}$$

二つ目の式は, x が奇数でも成り立つので,

$$(\log x)x - \log x - 2\log 2 \le U(x) \le (\log 2)x + \log x \quad (x \ge 2) \tag{9}$$

となる.

そこで

$$V(x) = (2\log 2)x + \frac{\log^2 x}{2\log 2} + \frac{\log x}{2} \quad (x \ge 1)$$

とおけば, 明らかに

$$V(x) - V\left(\frac{x}{2}\right) = (\log 2)x + \log x.$$

故に, (6), (9) から

$$V(x)-V\left(\frac{x}{2}\right)\geq U(x)\geq\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)$$

となる. $V(x)$ は x の単調増加関数であるので, これから

$$V(x)-\psi(x)\leq V\left(\frac{x}{2}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)\geq\cdots\geq V(1)\quad(x\geq 1)$$

すなわち

$$\psi(x)\leq V(x)-V(1)\quad(x\geq 1)$$

であることがわかる.
こうして

$$\psi(x)\leq(2\log 2)x+\frac{\log^2 x}{2\log 2}+\frac{\log x}{2}-2\log 2\quad(x\geq 1). \tag{10}$$

$$\psi\left(\frac{x}{3}\right)\leq\frac{2\log 2}{3}x+\frac{\log^2 x}{2\log 2}+\frac{\log x}{2}-2\log 2\quad(x\geq 3). \tag{11}$$

をえる.
さて,

$$W(x)=\frac{\log 2}{3}x-(4\log 2)x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{4\log 2}\log^2 x-\log x+4\log 2.$$

とすると, (8), (9), (10), (11) より, $x\geq 4$ のとき,

$$\sum_{\frac{x}{2}\leq p\leq x-2}\log p\geq\vartheta(x)-\vartheta\left(\frac{x}{2}\right)-\log x\geq W(x) \tag{12}$$

となることがわかる.
(簡単な) 計算により,

$$W(800)=\left(\frac{2843}{12}-80\sqrt{2}\right)\log 2-3\log 5\left(7+\frac{\log 5}{\log 2}\right)>0$$

となる. さらに,

$$W'(x)=\frac{2\log 2}{3}-\frac{2\log 2}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{3}{2\log 2}\cdot\frac{\log x}{x}-\frac{3}{x},$$

$$W''(x)=\frac{\log 2}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{2\log 2}\cdot\frac{\log x}{x^2}+3\left(1-\frac{1}{2\log 2}\right)\cdot\frac{1}{x^2}>0\quad(x>1),$$

$$W'(800)=\frac{1}{30\sqrt{2}}(20\sqrt{2}-3)\log 2-\frac{3}{800}\left(\frac{\log 5}{\log 2}+\frac{7}{2}\right)>0$$

であるから, 増減表は,

x	4	$\dots$	800	$\dots$
$W''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$W'(x)$	$-\left(\frac{2\log 2}{3}+\frac{3}{2}\right)$	$\nearrow$	$W'(800)>0$	$\nearrow$

となり, $W(x)$ については,

x	800	$\ldots$
$W'(x)$	$+$	$+$
$W(x)$	$W(800) > 0$	$\nearrow$

となる. よって,

$$W(x) > 0 \quad (x \geq 800) \tag{13}$$

を得る.
かくして, (13), (12) により, この定理 (定理 1.5) は $t \geq 400$ に対して証明された. $\frac{7}{2} \leq y \leq 400$ に対しては,

$$5,\ 7,\ 11,\ ,19,\ 31,\ 59,\ 113,\ 223,\ 443$$

がそれぞれ素数なので, 定理は示された.

Q.E.D.

定理 1.6 だけならもっと簡単に証明できる．だがその前に，補題を示しておく．以下，$x > 0$ とし，$P(x) :=$ (x 以下の素数の積) とする．

補題 1.7

$$\pi(x) \leq \frac{1}{3}x + 2$$

が成り立つ．

(証明)
まず，$\forall k \leq 25$ ($k \in \mathbb{Z}$) とすると，

$$\begin{aligned}\pi(k) &\leq k - 1 - \left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) - \left(\left[\frac{k}{3}\right] - 1\right) + \left[\frac{k}{2\dot{3}}\right] - 1 \\ &\leq k - 1 - \left(\frac{k}{2} - 2\right) - \left(\frac{k}{3} - 2\right) + \frac{k}{6} - 1 \\ &\leq \frac{k}{3} + 2\end{aligned}$$

となる．$1 \leq k \leq 24$ なるすべての k に対して不等式が成り立つことが計算により確かめられる．よって，すべての自然数 n について，成り立つ．
以上より，$\forall x \in \mathbb{R}$ について，

$$\pi(x) = \pi\left([x]\right) \leq \frac{1}{3}[x] + 2 \leq \frac{1}{3}x + 2$$

となり，成り立つ．

Q.E.D.

補題 1.8

$$\frac{P(2n-1)}{P(n)} \leq {}_{2n-1}C_n \leq 2^{2n-2}$$

が成り立つ．

(証明)

$${}_{2n-1}C_n = \frac{(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{(n-1)\dots 1}$$

この分子には，$n+1$ 以上 $2n-1$ 以下のすべての素数が現れ，それらは分母と約分できない．つまり

$$\frac{P(2n-1)}{P(n)} = \prod_{n+1 \leq p \leq 2n-1} p \leq {}_{2n-1}C_n$$

また，

$$\begin{aligned}{}_{2n-1}C_n &= \frac{1}{2} \cdot 2_{2n-1}C_n \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n-1} {}_{2n-1}C_i = \frac{1}{2}(1+1)^{2n-1} \\ &= 2^{2n-2}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{P(2n-1)}{P(n)} \leq {}_{2n-1}C_n \leq 2^{2n-2}$$

となる．

Q.E.D.

補題 1.9

$$P(x) < 2^{2x-3} \quad (x \geq 3)$$

が成り立つ.

(証明)

$n = 3,\ 4$ のとき,

$$P(3) = 6 < 2^3,\ P(4) = 6 < 2^5$$

となり, 成り立つ.
$3 \leq n \leq 2m-2$ $(m \geq 3)$ のとき,

$$P(2m-2) < 2^{2(2m-2)-3}$$

が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} P(2m-1) &= P(m) \cdot \frac{P(2m-1)}{P(m)} \\ &< 2^{2m-3} \cdot 2^{2m-2} (m < 2m-2\ (m \geq 3)\ \text{より仮定}, (2)) \\ &= 2^{4m-5} = 2^{2(2m-1)-3} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} P(2m) &= P(2m-1) \\ &< 2^{2(2m-1)-3} < 2^{2 \cdot 2m-3} \end{aligned}$$

となるので, 数学的帰納法を用いると, すべての自然数について成り立つ. 以上より,

$$\begin{aligned} &P(x) = P\left([x]\right) < 2^{2[x]-3} \leq 2^{2x-3} \\ &P(x) < 2^{2x-3} \end{aligned}$$

となる.

Q.E.D.

補題 1.10

$${}_{2n}C_n > \frac{2^{2n}}{n} \quad (n \geq 4)$$

が成り立つ.

(証明)

$n = 4$ のとき, ${}_8C_4 = 70,\ \frac{2^8}{4} = 64$ となり, 成り立つ.
$n = k-1$ のとき,

$${}_{2(k-1)}C_{(k-1)} > \frac{2^{2(k-1)}}{k-1}$$

が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} {}_{2k}C_k &= \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot \ldots \cdot (k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \\ &= \frac{2k \cdot (2k-1)}{k \cdot k} \cdot \frac{(2k-2) \cdot \ldots \cdot (k+1) \cdot k}{(k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = 2 \cdot \frac{2k-1}{k} \cdot {}_{2(k-1)}C_{(k-1)} \\ &> 2 \cdot \frac{2k-1}{k} \cdot \frac{2^{2(k-1)}}{k} = \frac{2^{2k}}{k} \quad (\text{仮定}) \\ &> 2 \cdot 2 \cdot \frac{2^{2(k-1)}}{k} = \frac{2^{2k}}{k} \quad (2 - \frac{1}{k-1} < 2) \end{aligned}$$

となり, $n = k$ のときも成り立つ.

以上より, 数学的帰納法によって,

$$ {}_{2n}C_n > \frac{2^{2n}}{n} \quad (n \geq 4) $$

が $n \geq 4$ のすべての自然数について成り立つ.

Q.E.D.

補題 1.11

$$ y = \frac{\log x}{x} $$

は $x \geq e$ で単調減少である.

(証明)

$$ y' = \frac{1 - \log x}{x^2} $$

より, 増減表は

x	1	$\dots$	e	$\dots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$

となるので,

$$ y = \frac{\log x}{x} $$

は $e \leq x$ で単調減少関数となる.

Q.E.D.

補題 1.12 ${}_{2n}C_n$ の素因数の指数は,

$$ e_p = \sum_{r=1}^{[\log 2n]} \left(\left[\frac{2n}{p^r} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^r} \right] \right) $$

となる. さらに,

$$ p^{e_p} \leq 2n,\ p > \sqrt{2n} \Rightarrow e_p = 1 $$

が成り立つ.

(証明)

(2) より,

$$ e_p = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{2n}{p^r} \right] - 2 \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^r} \right] = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^r} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^r} \right] \right) $$

さらに,

$$ r = \left[\frac{\log 2n}{\log p} \right] = [\log 2n] $$

のとき, 以降がすべて 0 になるから,

$$ e_p = \sum_{r=1}^{[\log 2n]} \left(\left[\frac{2n}{p^r} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^r} \right] \right) $$

が成り立つ.

さらに, このことから

$$e_p \leq \left[\log_p 2n\right] \leq \log_p 2n$$

となるので,

$$p^{e_p} \leq 2n$$

となり, 特に,

$$p > \sqrt{2n} \Rightarrow e_p < \log_p p^2 = 2,$$
$$p > \sqrt{2n} \Rightarrow e_p = 1$$

となる.

Q.E.D.

補題 1.13 $\frac{2n}{3} < p \leq n\ (n \geq 3)$ ならば, p は ${}_{2n}C_n$ を割らない奇素数である.

(証明)
$\frac{2n}{3} < p \leq n\ (n \geq 3)$ より, $2 < p$. すなわち, p は奇素数である. さらに, $\frac{2n}{3} < p \leq n$ より,

$$p \leq n < \frac{4n}{3} < 2p \leq 2n < 3p$$

であるから, p は

$${}_{2n}C_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

の分子, 分母にちょうど二回ずつ表れて約分される. したがって, p は ${}_{2n}C_n$ の素因数として現れない.

Q.E.D.

定理 1.6 の証明
$\forall n \geq 5\ (n \in \mathbb{N})$ とすると, $n < p \leq 2n$ を満たす $p \in \mathbb{P}$ が存在しないと仮定する.
まず,

$$p \leq \frac{2n}{3}$$

となる. なぜなら, $\frac{2n}{3}$ と仮定すると, 補題 1.12 より $p \leq 2n$ であり, 仮定と合わせて,

$$\frac{2n}{3} < p \leq n$$

ここで, $2n < \frac{4n^2}{9} \leq p^2\ (n \geq 5)$ なので,

$$\left[\log_p 2n\right] \leq 1$$

より,

$$\begin{aligned} e_p &\leq \left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] \\ &= 2 - 2 \cdot 1 \quad (\text{補題 1.13 の } 2p \leq 2n < 3p \text{ より, }) \end{aligned}$$

となり, これは, $e_p \geq 1$ に矛盾するからである.

次に,

$$ {}_{2n}C_n < (2n)^{\frac{1}{3}\sqrt{2n}+2} \cdot 2^{\frac{4n}{3}-5} $$

が成り立つ. なぜなら,

$$
\begin{aligned}
{}_{2n}C_n &= \prod_{p \leq 2n/3} p^{e_p} \\
&= \prod_{p \leq 2n/3} p^{e_p} \prod_{p \leq 2n/3} p^{e_p} = \prod_{p \leq 2n/3} p^{e_p} \cdot \frac{P\left(\frac{2n}{3}\right)}{P\left(\sqrt{2n}\right)} \quad (\text{補題 } 1.12 \text{ より}) \\
&< (2n)^{\frac{1}{3}\sqrt{2n}+2} \cdot \frac{2^{2\cdot\frac{2}{3}n-3}}{2\cdot 3} \quad (\text{補題 } 1.7,\ \text{補題 } 1.9, \sqrt{2n} > 3 \text{ より}) \\
&< (2n)^{\frac{1}{3}\sqrt{2n}+2} \cdot 2^{\frac{4}{3}n-5}
\end{aligned}
$$

となるからである.

さらに, $n < p \leq 2n$ を満たす $p \in \mathbb{P}$ が存在しないのは, $(5 \leq)n < 2^6$ であることがわかる. なぜなら, 上の結果と補題 1.10 を合わせて,

$$ \frac{2^{2n}}{n} < {}_{2n}C_n < (2n)^{\frac{1}{3}\sqrt{2n}+2} \cdot 2^{\frac{4n}{3}-5} $$

となる. 両辺に log をとり, 整理すると,

$$
\begin{aligned}
\log \frac{2^{2n}}{n} &< \log\left\{(2n)^{\frac{1}{3}\sqrt{2n}+2} \cdot 2^{\frac{4n}{3}-5}\right\} \\
\frac{2n}{3}\log 2 &< \frac{1}{3}\sqrt{2n}\log(2n) + \log\{n\cdot(2n)^2\cdot 2^{-5}\} \\
\frac{2n}{3}\log 2 &< \frac{1}{3}\sqrt{2n}\log(2n) + 3\log\frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

となり, 両辺を $\frac{3}{n}$ 倍して,

$$
\begin{aligned}
2\log 2 &< \frac{\sqrt{2n}}{n}\log(2n) + \frac{9}{n}\log\frac{n}{2} \\
&< \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\log 2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\log n^{\frac{1}{2}\cdots 2} + \frac{9}{n}\log\frac{n}{2} \\
\log 2 &< \sqrt{2}\cdot\frac{\log\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{9}{4}\cdot\frac{\log\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} + \frac{\log 2}{\sqrt{2n}}
\end{aligned}
$$

以上のように減少関数のみの式にできる. 右辺を $f(n)$ とすると, 補題 1.11 より, $f(n)$ は $n \geq \max\{e^2,\ 2e\} = 7.3\ldots$ で減少である.

$$
\begin{aligned}
f(2^6) &= \frac{45+56\sqrt{2}}{128}\log 2 \\
&< \frac{45+56\cdots 1.42}{128}\log 2 = \frac{124.52}{128}\log 2 < \log 2
\end{aligned}
$$

となり, $1 \leq n \leq 63$ のとき, $n < p \leq 2n$ を満たす $p \in \mathbb{P}$ が存在しない.

しかし, $5 \leq n \leq 63$ $(n \in mathbbN)$ に対して, $n < p \leq 2n$ を満たす $p \in \mathbb{P}$ が存在する. 実際, $n = 63$ のとき,

$$ 63 < 83 \leq 126,\ 83 \in \mathbb{P} $$

となり, これは矛盾である.

Q.E.D.

2 参考文献

[1] 内山 三郎:素数の分布, 第 1 刷 1970 年 6 月 25 日, 宝文館出版

[2] 高木貞治:初等整数論講義, 1971 年 10 月 15 日, 共立出版

[3] 栃折成紀:「n と $2n$ の間に素数がある」の証明を考える-ベルトラン · チェビショフの定理のより強い評価による証明-,
`https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/76/76-8.pdf`,
2016 年 5 月 16 日最終アクセス

[4] MATHEMATICS.PDF:Bertrand-Chebyshev の定理の *Erdös* による初等的な証明,
`http://mathematics-pdf.com/pdf/chebyshev.pdf`,
2016 年 5 月 16 日最終アクセス

[5] 青空学園数学科:素数定理,
`aozoragakuen.sakura.ne.jp/PDF/sosuuteiri.pdf`,
2016 年 5 月 16 日最終アクセス

[6] 吉田武:オイラーの贈物-人類の至宝 $e^{i\pi} = -1$ を学ぶ-, 第 1 刷 18 刷発行 2013 年 10 月 5 日, 東海大学出版会