# Taylor 展開

数理科学研究会　小池　智人

平成 28 年 5 月 22 日

# 目次

1 はじめに 1

2 級数展開 1

2.1 Taylor 展開とは . . . . . . . . . . . . 1

2.2 平均値の定理とその活用 . . . . . . . . . . . . 1

2.3 部分積分 . . . . . . . . . . . . 4

2.4 Taylor 展開 . . . . . . . . . . . . 5

3 まとめと今後の課題 8

# 1 はじめに

私たちの知る関数の中には解くことのできない方程式が無数に存在する. しかし, その方程式の解に対して近似法を用いれば正しい解に近いものが与えられることになる. その近似法の代表例として級数展開が挙げられる. 更に, 級数展開の中でも特別な場合となるものが Taylor 展開が有名である. しかし, その Taylor 展開において不思議に思う人も少なくないだろう. 今回はその Taylor 展開についてそれがどうやって導出されていくのか, その過程を考えていきたい.

# 2 級数展開

## 2.1 Taylor 展開とは

まず, 関数は次で与えることができる.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

この形を**べき級数**という. そして, この特殊系が Taylor **展開**と呼ばれている. Taylor 展開とは, 次で定められたものである.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

今回はこの式を既存の知識を基に導出していきたいと思う.
そのためには, 求めるために必要な定理から見ていくことにする.

## 2.2 平均値の定理とその活用

**定理 2.1** (中間値の定理)**.**
$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(x)$ はこの区間で $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値 $\lambda$ をとったとき, $f(x) = \lambda$ となる $x$ は少なくとも 1 つ存在する.

**証明.**
$f(a) < f(b)$ と仮定する.
$f(a) < \mu < f(b)$ なる任意の $\mu$ をとり, 固定する. $f(x)$ は $[a,\ b]$ で連続で $f(a) < \mu$ だか

ら, $a$ のある近傍と $[a,\ b]$ の共通部分では $f(x) < \mu$. 即ち,

$$a < {}^{\exists}\xi < b \text{ s.t. } x \in [a,\ \xi] \ \Rightarrow\ f(x) < \mu \tag{1}$$

が成り立つ. (1) を成立させるような $\xi$ 全体の集合を $A$ とすると, $f(a) < \mu$ であるから, $A = \emptyset$.
又, $f(b) > \mu$ より, $b$ は $A$ の上界だから $A$ は上に有界である. 従って, $A$ は上限 $c$ をもち, $a < c \leq b$ が成り立つ. この時, $f(c) = \mu$ を示す.
まず, $f(c) < \mu$ とすると, $c$ のある近傍で $f(x) < \mu$ となるから,

$${}^{\exists}\xi_1 > c \text{ s.t. } x \in [a,\ \xi_1] \ \Rightarrow\ f(x) < \mu$$

故に, $\xi_1 \in A$. これは $c$ が $A$ の上限であることに反する. よって, $f(c) \geq \mu$ である.
次に, $f(c) > \mu$ とすると, $c$ のある近傍で $f(x) > \mu$ となるから,

$${}^{\exists}\xi_2 < c \text{ s.t. } f(\xi_2) > M$$

が成り立つ. 故に, ${}^{\forall}\xi \in A$ に対して $\bigl(f(\xi) < \mu < f(\xi_2)\bigr)$ より, $\xi < \xi_2$ となり, これは $c$ が $A$ の上限であることに反する. よって, $f(c) = \mu$ である.
今, $a < c \leq b$ であったが, $f(b) > \mu$ だから $c \neq b$ なので, $a < c < b$.
$\bigl(f(a) > f(b)$ の時も同様$\bigr)$ ■

**定理 2.2** (平均値の定理)**.**
$f(x)$ は $[a,\ b]$ で連続関数とする. このとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f\bigl(a + \theta(b-a)\bigr)(b-a) \qquad (0 < \theta < 1)$$

をみたす $\theta$ が少なくとも 1 つ存在する.

**証明.**
$f(x)$ の $[a,\ b]$ における 最大値, 最小値をそれぞれ $M, m$ とする. $m < f(x) < M$ より,

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

が成り立つ. このとき,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a),$$
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

中間値の定理より,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

となる $c$ が存在する. 従って,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \qquad \bigl(a < {}^{\exists}c < b\bigr)$$

$0 < \dfrac{c-a}{b-a} < 1$ より $\theta = \dfrac{c-a}{b-a}$ とおくと,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f\bigl(a+\theta(b-a)\bigr)(b-a) \qquad \bigl(0 < {}^{\exists}\theta < 1\bigr)$$

より, 示された. ■

**系 2.3** (平均値の定理の拡張)**.**
$f(x)$, $g(x)$ は $[a,\ b]$ で連続関数とする. このとき,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f\bigl(a+\theta(b-a)\bigr)\int_a^b g(x)\,dx$$

となるような $0 < \theta < 1$ が存在する.

証明は平均値の定理と同様にして考えることで求められる.

**定理 2.4** (Rolle の定理)**.**
$f(x)$ が $[a,b]$ で連続, $(a,b)$ で微分可能で $f(a) = f(b)$ を満たすならば, 区間 $(a,b)$ の中の点 $c$ で $f'(c) = 0$ を満たすものが存在する.

**証明.**
$f(x)$ が定数関数ならば, $(a,b)$ の各点 $c$ で $f'(c) = 0$ となる.
$f(x)$ が定数関数でない場合を考える.
仮定より, $f(x)$ は $[a,b]$ で連続であるから, 最大値, 最小値を取る.
$f(a) = f(b)$ が最大値でないとし, $x = c$ $(a < c < b)$ で最大値 $f(c)$ を取るとする. この時,

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0\ ,\ f'_-(c) = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

であり, $f(x)$ は $x = c$ で微分可能であるから,

$$f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c) = 0$$

$f(a) = f(b)$ が最大値である場合, $x = c$ において最小値 $f(c)$ を取るとすれば,
同様にして $f'(c) = 0$ をとる. ■

**定理 2.5** (Cauchy の平均値の定理)**.**
$f(x)$, $g(x)$ は $[a,b]$ で連続, $(a,b)$ で微分可能とする. $g(a) \neq g(b)$ で $f'(x) = g'(x) = 0$ とならないならば,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < b)$$

をみたす点 $c$ が $(a,b)$ の中に存在する.

**証明.**

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Big\{g(x) - g(a)\Big\}$$

とおくと, $F(x)$ は $[a,\ b]$ で連続, $(a,\ b)$ で微分可能である. これに対し, $x$ に $a$, $b$ を代入すると,

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Big\{g(a) - g(a)\Big\} = 0$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Big\{g(b) - g(a)\Big\} = 0$$

より, $F(a) = F(b)$ が成り立つ. よって, Rolle の定理より $F'(c) = 0$ となる点 $c$ が区間 $(a,\ b)$ の中に存在する. ここで,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

であるから, $F'(c) = 0$ であることより

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を得る. ∎

## 2.3 部分積分

**定理 2.6** (部分積分の公式)**.**
$f(x)$, $g(x)$ は微分可能とする.

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

**証明.**
積の微分公式より,

$$\Big\{f(x)g(x)\Big\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

より, $f(x)g(x)$ は $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ の原始関数である. このとき,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) + C &= \int \Big\{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\Big\}\,dx \qquad \big(C: \text{積分定数}\big) \\ &= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

より示された. ∎

## 2.4　Taylor 展開

Taylor 展開は次の式から導出できる.
$f(x)$ は $[a,\ b]$ で定義されていて, $C^n$ 級で連続とする.

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\,dt$$

この式から, 部分積分の公式を適用する.

$$f(x) - f(c) = -\Big[(x-t)f'(t)\Big]_{t=c}^{t=x} + \int_c^x (x-t)f''(t)\,dt.$$

更に, 右辺の積分に対して部分積分を使うと,

$$\int_c^x (x-t)f''(t)\,dt = -\left[\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\right]_{t=c}^{t=x} + \int_c^x \frac{(x-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt$$

である. 同様にして, 出てくる積分に対して部分積分を繰り返すと, $f$ が $n$ 次導関数の積分となる場合には,

$$\int_c^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt = -\left[\frac{(x-t)^n}{n}f^{(n)}(t)\right]_{t=c}^{t=x} + \int_c^x \frac{(x-t)^n}{n}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

が得られる. 従って,

$$f(x) - f(c) = -\left[(x-t)f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) + \cdots + \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\right]_{t=c}^{t=x} + \int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

よって,

$$\begin{cases} f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + f''(c)\dfrac{(x-c)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(c)\dfrac{(x-c)^n}{n!} + R_n(x) \\ R_n(x) = \displaystyle\int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \end{cases} \tag{1}$$

ここで与えられた $f(x)$ は, $c$ を中心とする Taylor **展開**といい, $R_n(x)$ を**剰余項**という.

$R_n(x)$ に対して, $g(x) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$ とおくと, 平均値の定理より,

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \\
&= f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)\left[\frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\right]_{t=a}^{t=x} \\
&= f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \big(0 < {}^{\exists}\theta < 1\big)
\end{aligned}
$$

が得られる.

$n \to \infty$ のとき, $R_n(x) \to 0$ となれば, $f(x)$ は Taylor 展開可能といい,

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
$$

で表す.

**定理 2.7.**
$f(x)$ は $[a,\ b]$ で $n$ 回微分可能であるとする.

$$
f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n
$$

とおくと, 次の (i), (ii) をみたす $\xi_1$, $\xi_2$ が存在する.

(i) $R_n = \dfrac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(b-a)^n \qquad (a < \xi_1 < b)$

(ii) $R_n = \dfrac{f^{(n)}(\xi_2)}{(n-1)!}(b-\xi_2)^{n-1}(b-a) \qquad (a < \xi_2 < b)$

**証明**.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= f(b) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k \\
&= f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}
\end{aligned}
$$

とおくと, $F(x)$ は $x$ で微分可能であるから,

$$
\frac{dF(x)}{dx} = -\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}.
$$

また,

$$
F(a) = R_n,\ F(b) = 0
$$

であるから, $G(x) = (b-x)^m$ となる $m \in \mathbb{N}$ を 1 つとると,

$$G(a) = (b-a)^m,\ G(b) = 0,\ G'(x) = -m(b-x)^{m-1}$$

Cauchy の平均値の定理より,

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(x)} \qquad (a < \xi < b)$$

をみたす $\xi$ が存在する.

$$\begin{aligned}\frac{-R_n}{-(b-a)^m} &= \frac{-\dfrac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)(b-\xi)^{n-1}}{-m(b-\xi)^{m-1}}, \\ R_n &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{m(n-1)!}(b-\xi)^{n-m}(b-a)^m.\end{aligned}$$

$m = n$ のとき, (i) を得る.
$m = 1$ のとき, (ii) を得る. ∎

(1) において, $c = 0$ のとき, 即ち,

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\end{aligned}$$

をみたすとき, このことを Maclaurin **展開**と呼ぶ.

**定義 2.8.**
$\{f_n(x)\}$ が $I$ 上で $g(x)$ に一様収束するとは,

$$^\forall x \in I,\ ^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > N \ \Rightarrow\ \left|f_n(x) - g(x)\right| < \varepsilon$$

**定義 2.9.**
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ が $I$ 上で一様収束するとは,

$$^\forall x \in I,\ ^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > N \ \Rightarrow\ \left|R_n(x)\right| < \varepsilon$$

**定理 2.10** (Abel の定理)**.**

$$f(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

は $x = R$ で収束する級数である. このとき, 級数は $0 \leq x \leq R$ で一様収束する.

## 3 まとめと今後の課題

研究に時間をあまり割くことができず, 本来目標にしていたところまでまとめることができなかったので, また個人的に学習を進めていくようにしていきたいと思う. また, 多変数関数の Taylor 展開についても考察していきたい.

## 参考文献

[1] 田島一郎, 解析入門, 岩波全書, 2015 年.
[2] 溝畑茂, 数学解析, 朝倉書店, 2007 年.