オタクスパイラルの発見と定式化

芝浦工業大学 数理科学研究会

～第20回大宮祭研究発表資料～

平成28年5月22日

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

制作: BV14045 長瀬准平

目 次

1　研究背景

近年少子化が我が国の深刻な問題として挙げられることは明らかであろう．私自身芝浦工業大学で生活していく中で, 現実の女性への興味関心の薄れ（それは諦めに近いものでもある）を感じていた．そこで「オタクは, オタクとして生活することでリアルへの関心を失い, またオタクはそこから抜け出すことは難しいのではないか．」という仮説を立てた．この現象を**オタクスパイラル**と名付け, その発生条件について数学的手法を用いて研究する．

2　準備

パラメータを持った物体を**アイテム**と呼ぶ．パラメータとはそのアイテムの位置情報であったり, 一日にアニメを見る回数であったり, リアルへの関心度であったりする．ここで空間内をアイテムが適当に動き回ることとし, その挙動は時間に依存しない, すなわち現在のアイテムの地点によって次の変化量が定まり, それ以外に挙動に作用するものはないとする．この仮定により, ある時刻のおけるアイテムの位置を参照すれば, その次の時刻におけるアイテムの位置を求めることができる．

ある時刻に, ある地点 $(\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$ に存在するアイテムが M 通りの挙動の選択肢を持つものとし, その増分から数列あるいは微分方程式をつくる． その数列の極限, または微分方程式の解について考察することでアイテムの挙動を調べることができる．また, このような定式化によってシミュレーションがしやすくなることを見越している． このときの選択肢をイベントと呼び, それぞれを**イベント $\boldsymbol{j}$** と呼ぶ $(j \in \{0, 1, 2, \cdots, M-1\} = J)$．そしてそのイベント j によるアイテムの変化量 $(\Delta\boldsymbol{x})$ を $h\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x})$ と表すことにする $\left(\boldsymbol{f}_{(j)} = (f_{(j)1}, f_{(j)2}, \cdots, f_{(j)n},) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\right)$．$h$ を入れた理由については後述 (2.2 節)．

2.1　基本数列

$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \Delta\boldsymbol{x}_n$ としたとき, 階差数列の性質からこの数列の一般項

$$\boldsymbol{x}_{n(j)} = \boldsymbol{x}_0 + h\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}_k) \tag{1}$$

が得られる．ただし, この数列ではイベント j のみを繰り返し適用した結果が与えられることに留意したい (そのために $\boldsymbol{x}_{n(j)}$ とした)．この数列の極限を考えることでイベント j のみで変化したアイテムの挙動が分かる．これを **$\boldsymbol{j}$ の基本数列**と呼び次節以降の議論を進める．

2.2 微分方程式化

アイテムが空間内に一様に存在している (あるいは場によってアイテムが連続的に動かされている) と見なすことでベクトル場が構成できる．そのために $\Delta \boldsymbol{x}_{n(j)} = \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}_n)$ の増分である $\Delta \boldsymbol{x}_n$ を微分 $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}$ に置き換えることを考える．

x を t の関数とみて, $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_{(nh)}$ とおく ($t = nh$ のときの x. h は定数で, 項数 n が変化すると x の変数 t が h だけ変化する).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) &= \frac{\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n}{h} \\
&= \frac{\boldsymbol{x}_{(t+h)} - \boldsymbol{x}_{(t)}}{h} \\
\lim_{h\to 0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) &= \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{x}_{(t+h)} - \boldsymbol{x}_{(t)}}{h} \\
&= \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

同様の議論を j の基本数列に用いることで, 常微分方程式

$$
\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_{(j)} = \lim_{h\to 0} \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}) \tag{2}
$$

が得られる．常微分方程式が得られたのでベクトル場が構成できる．したがってオタクスパイラルの解析に力学系の理論を用いることができるようになった．

3 モデルの構築

前節で準備した基本的な形を元にモデルを構築し, その数列の極限や微分方程式の解について研究した．この章では最尤モデルと期待値モデルについての説明と, 具体的な構成方法を紹介する．まず導入として各イベントの発生確率を $p_{(j)}(\boldsymbol{x})$ $\left(p_{(j)} =: \mathbb{R}^n \to [0,1]\right)$ と定義しておく．なお, $\displaystyle\sum_{j=0}^{M-1} p_{(j)}(\boldsymbol{x}) = 1$ である．

3.1 最尤モデル

基本数列 (1) の $\boldsymbol{f}_{(j)}$ を関数 $\mathfrak{F}$ で置き換えた数列を考える．$\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x})$ (ただし, j は $\boldsymbol{x}$ について $p_{(j)}(\boldsymbol{x})$ が最も高くなる j) と定義する．このモデルは一番確率が高いイベントを毎回選択するものとなっている．

$$
\boldsymbol{x}_{n(j)} = \boldsymbol{x}_0 + h \sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{F}(\boldsymbol{x}_k) \tag{3}
$$

具体的に $\mathfrak{F}$ を構成するとなると, 各 j に対して $p_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)$ を計算し, その値が最も高くなった j に関する $\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)$ を求めるような関数を考えれば良い. 一つの例として $F(p_{(j)}) = \boldsymbol{f}_{(j)}$ となる関数 F を用いて

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{x}_k) = F(p_{\max}(\boldsymbol{x}_k))$$

と表すことが考えられる. ただし, $p_{\max}(\boldsymbol{x}_k) := \max_{j\in J}(p_j(\boldsymbol{x}_k))$. このとき $p_{\max}$ は具体的に構成できる (3.1.1 節). また, $F(p_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)) = \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)$ の存在もファンデルモンド行列の性質からいえる (3.1.2 節).

3.1.1 最大値関数

ある 2 つの値 a, b について, $\max(a,b)$ を考えると

$$\begin{aligned}\max(a,b) &= \frac{|a-b|+a+b}{2} \\ &= \begin{cases} a & (a \geq b) \\ b & (a < b) \end{cases}\end{aligned}$$

というように具体的な関数を与えることができる. 同様に 2 つの関数値についても具体的な関数が与えられる.

$$\max(p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k), p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)) = \frac{|p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)| + p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) + p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)}{2}$$

また, 最大値関数について以下のような性質が (ある意味では自明ではあるが) 成り立つので紹介しておく.

$$(\max(a,b))^2 = \max(a^2,b^2) = \frac{|a^2-b^2|+a^2+b^2}{2}$$

この関数を, 2 つ以上の値の最大値を返す関数に拡張したい. そこで $\mathfrak{M}(a,b) = \frac{|a-b|+a+b}{2}$ とおくと, 例えば 3 つのある値 a, b, c に対して

$$\begin{aligned}\max(a,b,c) &= \max(\max(a,b),c) \\ &= \mathfrak{M}(\mathfrak{M}(a,b),c) \\ &= \frac{|\mathfrak{M}(a,b)-c| + \mathfrak{M}(a,b)+c}{2} \\ &= \frac{\left|\frac{|a-b|+a+b}{2} - c\right| + \frac{|a-b|+a+b}{2} + c}{2} \\ &= \frac{1}{2^2}(||a-b|+a+b-2c| + |a-b|+a+b+2c)\end{aligned}$$

以上のように $\mathfrak{M}$ を二回実行することで最大値を具体的に求める関数が得られることがわかる. また, 4 つのある値 a, b, c, d に対して

$$
\begin{aligned}
\max(a,b,c,d) =& \max(\max(a,b,c),d) \\
=& \mathfrak{M}\left(\mathfrak{M}\left(\mathfrak{M}(a,b),c\right),d\right) \\
=& \frac{|\mathfrak{M}\left(\mathfrak{M}(a,b),c\right)-d| + \mathfrak{M}\left(\mathfrak{M}(a,b),c\right)+d}{2} \\
=& \frac{1}{2^3}\left(|4\mathfrak{M}\left(\mathfrak{M}(a,b),c\right)-4d| + 4\mathfrak{M}\left(\mathfrak{M}(a,b),c\right)+4d\right) \\
=& \frac{1}{2^3}\left(|\left(||a-b|+a+b-2c|+|a-b|+a+b+2c\right)-4d|\right. \\
& \left. +\left(||a-b|+a+b-2c|+|a-b|+a+b+2c\right)+4d\right)
\end{aligned}
$$

となる. 同様に n 個の値の最大値を求めるためには $n-1$ 回 $\mathfrak{M}$ を実行すればよいことがわかる. そこで, そのときの式について

$$
\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\cdots(\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(a_1,a_2),a_3))\cdots),a_n) = \mathfrak{M}^{n-1}(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)
$$

このような略記を導入し議論を進める. また, 以上の結果から帰納的に

$$
\mathfrak{M}^{n-1}(a_1,\cdots a_n) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(|\mathfrak{M}^{n-2}-2^{n-2}a_n| + \mathfrak{M}^{n}+2^{n-2}a_n\right)
$$

となることがわかる. しかし, この漸化式を解くことは容易でなく, 再帰的に関数 $\mathfrak{M}$ を実行していくほうが計算も楽である. なお $\mathfrak{M}$ を用いて $p_{\max}$ を表すと

$$
\begin{aligned}
p_{\max}(\boldsymbol{x}_k) &= \max_{j\in J}(p_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)) \\
&= \mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\cdots(\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k),p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)),p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k)))\cdots),p_{(M-1)}(\boldsymbol{x}_k)) \\
&= \mathfrak{M}^{M-1}(p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k),\cdots,p_{(M-1)}(\boldsymbol{x}_k))
\end{aligned}
$$

このようになり, M 通りそれぞれのイベントが起こる確率の中で, 最大の確率を返す関数を構成することができた.

3.1.2　ファンデルモンド行列

ファンデルモンド行列 V とは以下のような行列のことであり, 1(行) 列目がすべて 1. 2(行) 列目以降は各 (行) 列毎に等比数列のようになっている.

$$
V = \begin{pmatrix}
1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^{n-1} \\
1 & x_2 & (x_2)^2 & \cdots & (x_2)^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^{n-1}
\end{pmatrix}
$$

ファンデルモンド行列は n 個の点を通る多項式関数を求める際などに用いられる. またファンデルモンド行列の行列式に関して以下のような性質が成り立つ.

補題 3.1.

$$\det V = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

補題 3.2.

$$\text{ファンデルモンド行列}\, V\, \text{に逆行列が存在する} \Leftrightarrow x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$$

以上の性質を利用すると次のことがいえる.

定理 3.3. $j \in J$ について $p_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)$ がそれぞれ異なれば, $F(p_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)) = \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)$ となる多項式関数 F が存在し, またそれを具体的に構成することができる.

証明. F を $M-1$ 次多項式関数とし, $F(\boldsymbol{x}) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{M-1}x^{M-1}$ とおく. 各イベント j について

$$F(p_{(j)}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x})$$

という条件を与えると, $M-1$ 元連立方程式を考えることができる. この連立方程式を行列で書き表すと次のようになる.

$$\begin{pmatrix} 1 & p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) & (p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k))^2 & \cdots & (p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k))^{M-1} \\ 1 & p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & p_{(M-1)}(\boldsymbol{x}_k) & \cdots & \cdots & (p_{(M-1)}(\boldsymbol{x}_k))^{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{(M-1)}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

この左辺の行列はファンデルモンド行列となっているので, 各 $p_{(j)}(\boldsymbol{x})$ が異なっていれば逆行列が存在する. そしてその逆行列は具体的に求められる [1].

よって, $a_0, \cdots, a_{M-1}$ が定まり, $F(\boldsymbol{x})$ を構成することができた. □

3.1.3 例

以上の (3.1.2) 節と (3.1.2) 節から $\mathfrak{F}$ が構成できることがわかった. そこで実際にイベントが二種類の場合 ($J = \{0, 1\}$) の最尤モデルを例に挙げる.

最大値関数は前述のように以下で与えられる.

$$\begin{aligned} p_{\max}(\boldsymbol{x}_k) &= \max\left(p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k), p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)\right) \\ &= \frac{|p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)| + p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) + p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)}{2} \end{aligned}$$

また, F を与える連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) \\ 1 & p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

を $p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) \neq p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)$ という仮定で解くと,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} =& \frac{1}{p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k)} \begin{pmatrix} p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) & -p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k)} \begin{pmatrix} p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}) - p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}) \\ -\boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

以上の結果を代入して整理することで $\mathfrak{F}$ が得られる.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\boldsymbol{x}_k) =& F(p_{\max}(\boldsymbol{x}_k)) \\ =& a_0 + a_1 p_{\max}(\boldsymbol{x}_k) \\ =& \frac{|p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)|}{p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)} \frac{\boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)}{2} + \frac{\boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)}{2}\end{aligned}$$

このように具体的な $\mathfrak{F}$ を構成することができたが, 計算量も多く解析しづらい形になっている. このことから最尤モデルは数値解析的な手法で研究することが相応しいと考えられる.

また, イベント数が 2 のときに最終的に得られた $\mathfrak{F}$ はある意味自明であり, このような煩雑な議論を追わなくても導け得る. そこでイベントが 3 つの場合の例を挙げたいと思う. しかし, かなり禍々しい式になってしまった. これ以上綺麗な式にできる可能性もあるが, 私自身の中間試験勉強のためにこれ以上の式変形は今後の課題としたい.

$J = 0, 1, 2$ のとき,

$$p_{\max}(\boldsymbol{x}_k) = \tfrac{1}{2^2}\left(\Big||p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)| + p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) + p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) - 2p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k)\Big| + |p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)| + p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) + p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) + 2p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k)\right)$$

$\det V = (p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k))(p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k))(p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k))$ であり,

$$\begin{aligned}a_0 =& \frac{\left(p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k)p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)(p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k))\boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k)p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k)(p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k))\boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) + p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k)p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k)(p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k))\boldsymbol{f}_{(2)}(\boldsymbol{x}_k)\right)}{\det V} \\ a_1 =& \tfrac{1}{\det V}\left(-((p_2(\boldsymbol{x}_k))^2 - (p_1(\boldsymbol{x}_k))^2)\boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) + ((p_2(\boldsymbol{x}_k))^2 - (p_0(\boldsymbol{x}_k))^2)\boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) - ((p_1(\boldsymbol{x}_k))^2 - (p_0(\boldsymbol{x}_k))^2)\boldsymbol{f}_{(2)}(\boldsymbol{x}_k)\right) \\ =& \tfrac{1}{\det V}\left((p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k))^2(\boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}_k)) + (p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k))^2(\boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}_{(2)}(\boldsymbol{x}_k)) + (p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k))^2(\boldsymbol{f}_{(2)}(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_k))\right) \\ a_2 =& \tfrac{1}{\det V}\left((p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k))\boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - (p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k))\boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) + (p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) - p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k))\boldsymbol{f}_{(2)}(\boldsymbol{x}_k)\right) \\ =& \tfrac{-1}{\det V}\left((p_{(2)}(\boldsymbol{x}_k))(\boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}_k)) + (p_{(1)}(\boldsymbol{x}_k))(\boldsymbol{f}_{(0)}(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}_{(2)}(\boldsymbol{x}_k)) + (p_{(0)}(\boldsymbol{x}_k))(\boldsymbol{f}_{(2)}(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_k))\right)\end{aligned}$$

について,

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{x}) = a_0 + a_1 p_{\max}(\boldsymbol{x}_k) + a_2(p_{\max}(\boldsymbol{x}_k))^2$$

であるが, これを (現時点で私ができているところまで) 整理すると,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{f_0 + f_1 + 2f_2}{4} + \frac{1}{4\det V}\Bigg(&+ f_0(p_1 - p_2)\left(\frac{L}{2}(p_0 + 3p_1 + 4p_2) + l(p_0 + 2p_1 + p_2) + \frac{Ll}{2}\right) \\ &+ f_1(p_2 - p_0)\left(\frac{L}{2}(3p_0 + p_1 + 4p_2) + l(2p_0 + p_1 + p_2) + \frac{Ll}{2}\right) \\ &+ f_2(p_0 - p_1)\left(\frac{L}{2}(3p_0 + 3p_1 + 2p_2) + 2l(p_0 + p_1) + \frac{Ll}{2}\right)\Bigg)\end{aligned}$$

(ただし, $L = |l + p_0 + p_1 - 2p_2|$, $l = |p_0 - p_1|$ であり, 簡単のため $\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)$ と $p_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)$ はそれぞれ f_j, p_j としている.)

3.2 期待値モデル

すべてのイベント結果 $(\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}))$ をそれぞれの確率の重みで平均化したモデル (期待値モデル) を考える.

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0 + \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{M-1} p_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}_k) \tag{4}$$

数列 (1) の $\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)$ を $\displaystyle\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} p_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)$ で置き換えた形になっている. 最尤モデルと異なり, 具体的な関数が与えられているために解析しやすいと予想される一方で, 関数の和や積が多く含まれている点が微分方程式に置き換える. 簡単のため $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ で表すが, $\mathbb{R}^n$ に拡張できる.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} p_{(j)}(x, y)\boldsymbol{f}_{(j)}(x, y)$$

$\displaystyle\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E(x, y)$ とおくと, E は一見複雑であるが, $f_{(j)}(x, y) = 0$ を解くことで不動点が得られるので, その近傍についての解析は比較的容易である.

4 シミュレーション

条件通りのシミュレーションと 3.1 節で扱った最尤モデルのシミュレーションをしてみた. データなどから上手い関数 $\boldsymbol{f}_{(j)}$, $p_{(j)}$ を設定する必要がある.

5 解析

基本数列と微分方程式について様々な解析的な結論が得られたので示す.

補題 5.1. 各イベント j について, $n \to \infty$ または $t \to \infty$ のとき,

$$\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \Rightarrow \quad p_{(j)}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}) \to 0$$

証明. $p_{(j)}(\boldsymbol{x}) \in [0, 1]$ より

$$0 \leq |p_{(j)}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x})| \leq |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|$$

よって, はさみうちの定理を用いて $p_{(j)}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}) \to 0$ □

以下, $\boldsymbol{x}_{n+1} = g(\boldsymbol{x}_n)$ とおく. すなわち $g(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$ である.

定義 5.2 (不動点)**.**
$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \Delta\boldsymbol{x}$ について, $x^\star = g(x^\star)$ であるとき, $x^\star$ は $\{\boldsymbol{x}_n\}$ の**不動点**であるという. また, g の不動点であるともいう.
$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x})$ について, $f(x^\star) = 0$ であるとき, $x^\star$ は $\boldsymbol{x}$ の**不動点**であるという.

補題 5.3.

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

補題 5.4.

$$\begin{aligned}
&x^\star \text{は} \{\boldsymbol{x}_n\} \text{の不動点} \\
\Leftrightarrow\ & x^\star = x^\star + hf(x^\star) \\
\Leftrightarrow\ & f(x^\star) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^\star \text{は} \boldsymbol{x} \text{の不動点}
\end{aligned}$$

補題 5.5. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が連続関数であるとき,

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = x^\star \quad \Rightarrow \quad x^\star \text{は} \boldsymbol{x}_n \text{の不動点である}$$

証明. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が連続ならば $g(\boldsymbol{x}_n)$ も連続である. したがって

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} g(\boldsymbol{x}_n) \\
&= g(\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n)
\end{aligned}$$

ここで $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_{n+1} = x^\star$ より

$$x^\star = g(x^\star)$$

よって $x^\star$ は $\{\boldsymbol{x}_n\}$ の不動点である. □

補題 5.6. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が連続関数であるとき,

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = x^\star \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = 0$$

証明. $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_{n+1} = x^\star$ より,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}(\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n) \\
&= \frac{1}{h}(\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_{n+1}) - \lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_{n+1})) \\
&= \frac{1}{h}(x^\star - x^\star) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

6　今後の課題

シミュレーションに取り入れるべき設定の考察, 今回の議論を発展させ, 多変量解析などの確率分野のモデルとして応用していきたい.

参考文献

[1] Victor-Emil Neagoe, Inversion of van der Monde matrix, IEEE Signal Processing Letters vol.3, No. 4, 1996, pp.119–120

[2] 丹羽敏雄, 微分方程式と力学系の理論入門【増補版】, 遊星社, 2004 年.

[3] 森真 · 水谷正大, 入門 力学系–自然の振舞いを数学で読みとく, 東京図書, 2009 年.