結び目を数式化する

西木航

芝浦工業大学 数理科学研究会

平成 28 年 05 月 22 日

Contents

一時期, 結び目理論のゼミを行ったが, 予備知識が乏しく, 定理を利用し図で同相か確かめる程度で終わってしまったため, 結び目を数式等を利用してパターン化出来ないかと目論んだ.

結び目理論

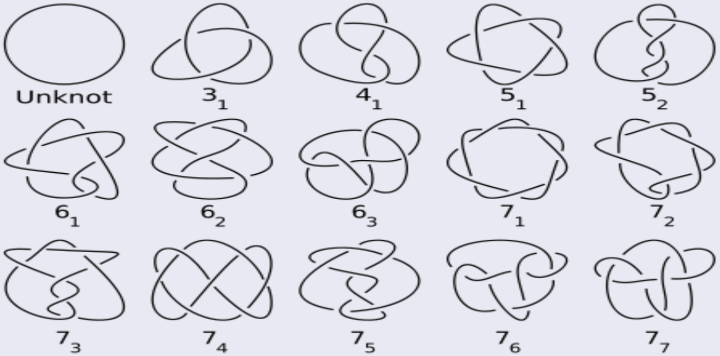
結び目理論とは

紐 (閉じた曲線) の結び目を数学的に表現し, 計算する学問. 二つの結び目が同位であるかを考えることが多い. 低次元位相幾何の一種. 結び目は 3 次元のものだが, そのまま扱うのは難しいため, 2 次元平面に射影して扱う.

位相幾何 $\cdots$ 連続的にひっぱたり延ばしたり, はたまたその逆の動作を許すもの.

結び目理論とは

結び目の例



unknot のものを自明な結び目という.

導入

例) 靴の紐などを蝶結びするとき, ちょっとした違いで縦結びになったり横結びになったりすることはよく知られている. このようなとき, 結び目理論では, 紐の両端をつないで輪の形にすることで, これらの結び目が図形としてどのように異なるか（あるいは同じものなのか）ということを数学的に明らかにすることができる.
他に, 四色問題, ネクタイや立体分子構造などにも応用できる.

一般に, 二つの結び目（あるいは絡み目）が同じであるかどうかは, ライデマイスター移動などの局所変形や交差の入れ替えなどの結び目解消操作を用いて調べられる.

結び目理論 (*knot theory*) とは

導入

結び目や絡み目の分類は, 結び目不変量 (*knot – invariant*) あるいは絡み目不変量 (*link – invariant*) と呼ばれる "量" の発見と構成を主として行われる. 例えば, 絡み目の外部の基本群を周辺構造 (*peripheral structure*) 込みで考えたものは, 結び目の完全不変量である. しかし, 肝心の群の分類が容易ではないためこれを不変量として用いることはほとんどないようである. 主に使われる不変量はアレクサンダー多項式などの多項式不変量や, 結び目解消数 (*unknottingnumber*) などである. 今回は, ブラケット多項式というものを扱う.

ライデマイスター移動

ライデマイスター移動とは

同値関係を保つ 4 種の移動のこと.

3 次元空間内の結び目, あるいは絡み目が一方から他方へ連続的に変形できる必要十分条件は, ライデマイスター移動の列によって, 一方の絡み目のある図形表示に変換できることである.

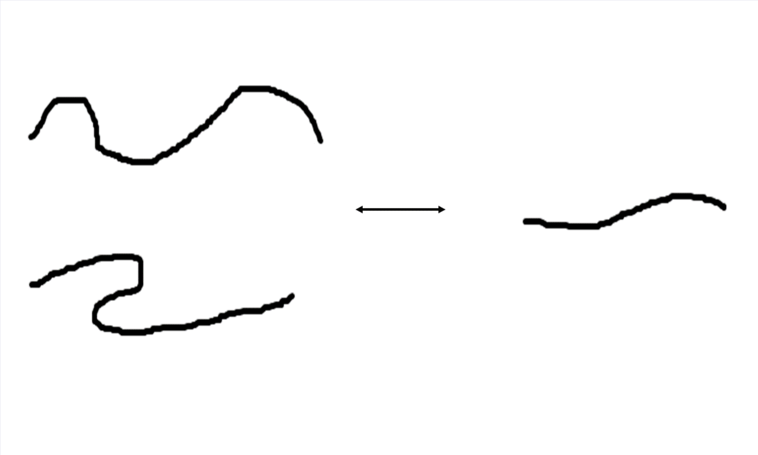
ライデマイスター移動を通して生成される同値関係を, 全同位 と呼ぶ.

$\downarrow$

全同位 $\cdots$ 2 つの平面図形 $X \subset \mathbb{R}^2$, $Y \subset \mathbb{R}^2$ に対して, $\mathbb{R}^2$ の向きを保つ同相であるとき, X, Y は同位であるという. $(\approx)$

同相 $\cdots$ X, Y が位相空間として等しい. つまり, $X \to Y$ が全単射かつ連続であり, $Y \to X$ が連続であるとき X と Y は同相という.$(\cong)$

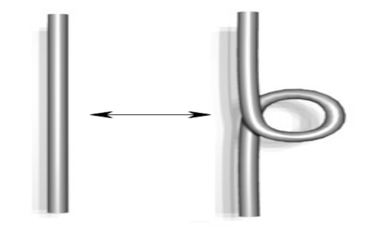
ライデマイスター移動の図

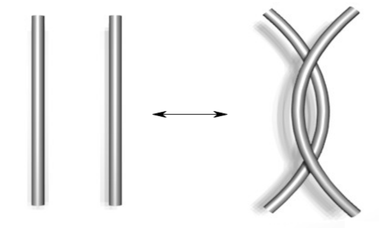


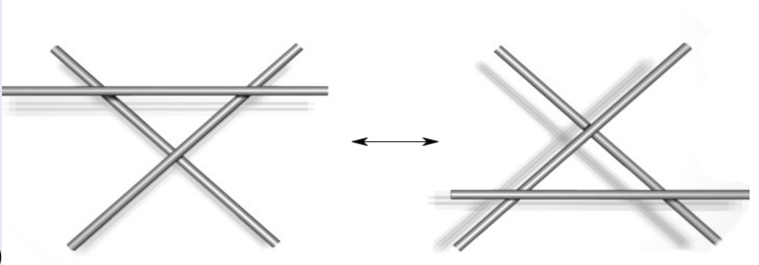
(0)

ライデマイスター移動 (Reidemeister 移動)

ライデマイスター移動の図

(1) 

(2) 

(3) 

https : //ja.wikipedia.org/wiki/(ウィキペディア: 結び目理論)