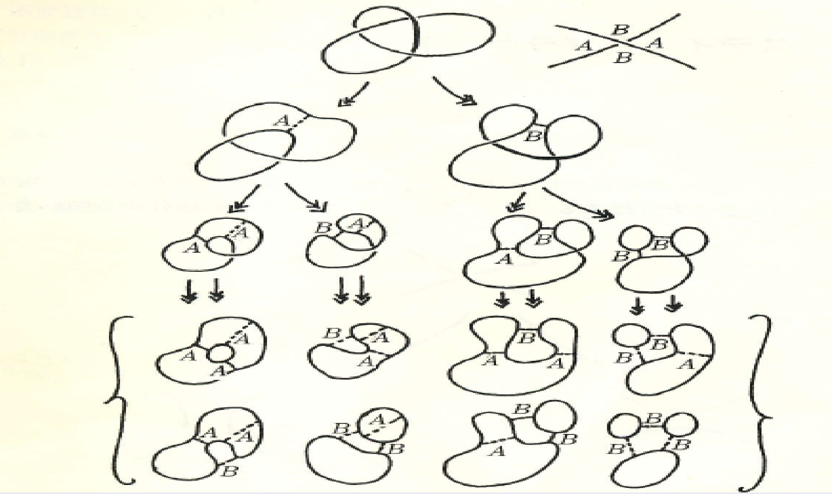
ステイトとブラケット多項式

分離する (sprit)

向きの定めていない絡み目の図形表示の中の **1** つの交差点を考える. 次の図のように, この交差点を**分離する**ことによって, **2** つの随伴する図形表示が得られる.

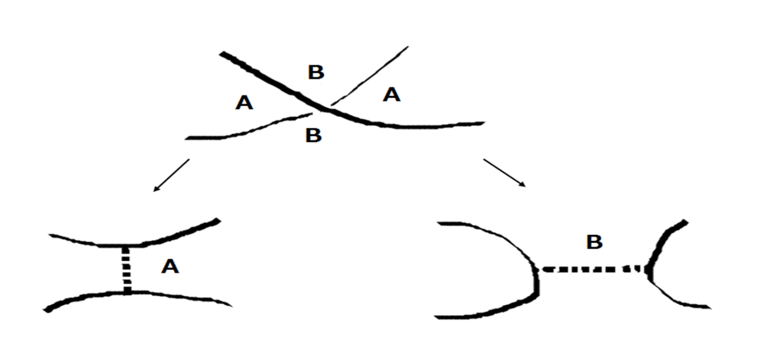
このニつの分離タイプを左から A, B とする. この操作を反復し, 一つも交差のない状態にする.

分離する (sprit)



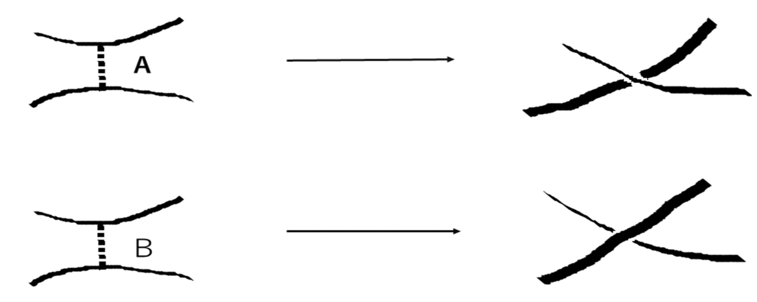
分離する (sprit)

因みに, A, B と自然に分離の仕方を定義したが, 丁寧に言うと, 上の図のように, 局所的に切り取った領域に A, B とラベル付けを行い (下交差線に沿ってその交差点に向かって左側に現れる領域を A とし, 他方を B とする), 同じラベル付けされた領域が結ばれることを指す.



再構成

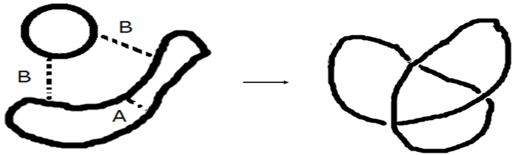
どの場合でも A または B がラベル付けされた分離の位置は, そのもとの交差の形に再構成できる (不変性を満たす).



従って, これらの A と B の痕跡を残しておけば, その子孫のどれからでも祖先の絡み目を再構成することができる. もっとも幼い子孫は平面上の Jordan 曲線の集まりである.
Jordan 曲線 $\cdots$ 自身と交わらない閉じた曲線.

ステイト (states)

下の図は図 9 のうちのひとつの再構成の見本である.

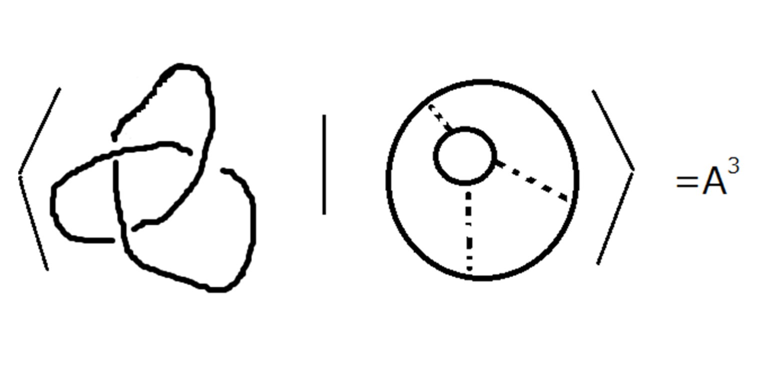


与えられた結び目または絡み目 K のこれらのもっとも幼い子孫を, K のステイトとよぶ. これらのステイト全体にわたって平均をとるような結び目や絡み目の不変量を構成していく.

ステイトとブラケット多項式

ブラケット多項式

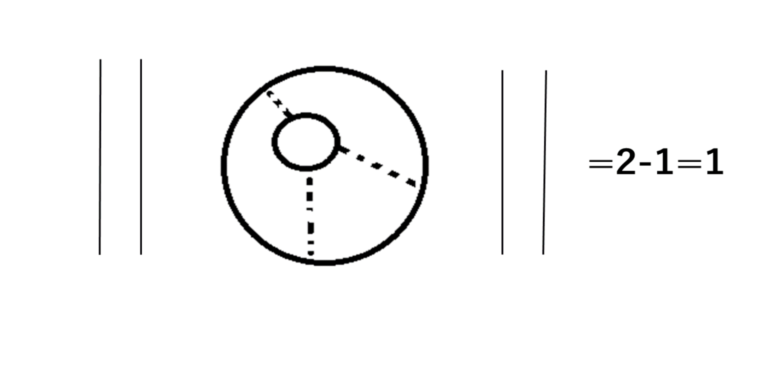
平均化の特別な形として, 次のようなものが挙げられる:
σ を K のステイトとする. そこで $\langle K|\sigma\rangle$ によって, σ についたラベル $(A,\ B)$ の積を表す. すると, 例えば次のようになる.



ステイトとブラケット多項式

ブラケット多項式

また, $\|\sigma\|$ によって, σ の中のループの個数から **1** を引いた数 (分離数) を表す. すると, 次のようになる.



定義 (ブラケット多項式)

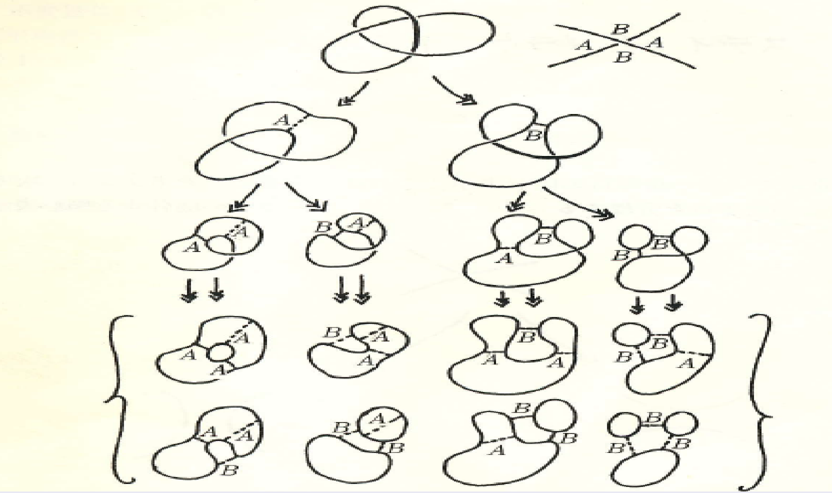
絡み目 K のブラケット多項式を, 次の公式で定義する:

$$\langle K \rangle = \langle K \rangle(A,\ B,\ d) = \sum_{\sigma} \langle K | \sigma \rangle d^{\|\sigma\|}$$

ただし, $A,\ B,\ d$ は可換な変数である. また $\sum$ は K のステイト全体にわたって動くものとする.

例題 (ブラケット多項式)

再掲



例題 (ブラケット多項式)

以上より, 図 *9* の三葉結び目のブラケット多項式が, 次のようにして得られる*:*

$$
\begin{aligned}
\langle K\rangle =& A^3d^{2-1} + A^2Bd^{1-1} + A^2Bd^{1-1} + AB^2d^{2-1} + A^2Bd^{1-1} \\
&+ AB^{2-1} + AB^2d^{2-1} + B^3d^{3-1} \\
\langle K\rangle =& A^3d^1 + 3A^2Bd^0 + 3AB^2d^1 + B^3d^2.
\end{aligned}
$$