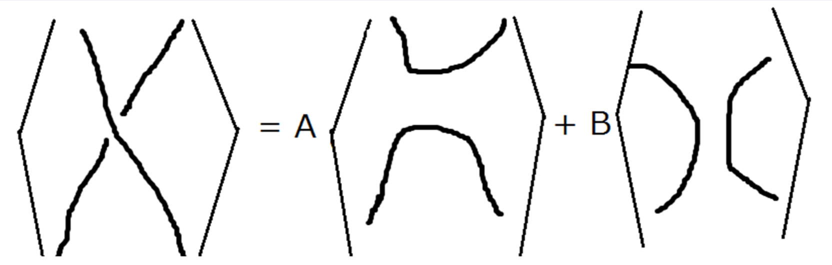
ブラケット多項式

このブラケット多項式は, このままではトポロジー的な不変量ではない. そこで, それが **Reidemeister** 移動の下でどのような行動をするかを調べ, それが不変量となるための $A,\ B,\ d$ の条件を決定する.

ステイトとブラケット多項式

命題 (ブラケット多項式)

先ほど定義した多項式に基づいて, このような表記も出来る.

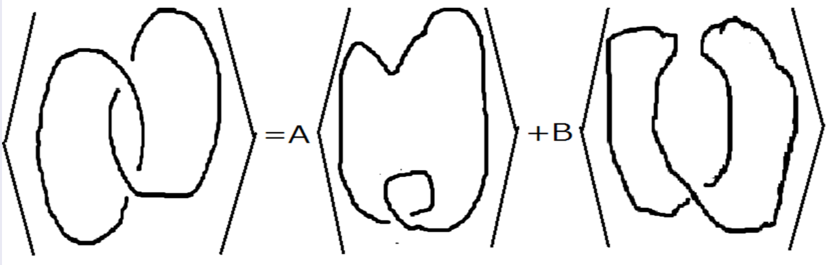


この命題の意味は, 各（小さい）部分的な図形表示を大きな図形表示の一部分とみなし, 山括弧の中の局所的な場所を除いて, 同一であるとする.

ステイトとブラケット多項式

命題 (ブラケット多項式)

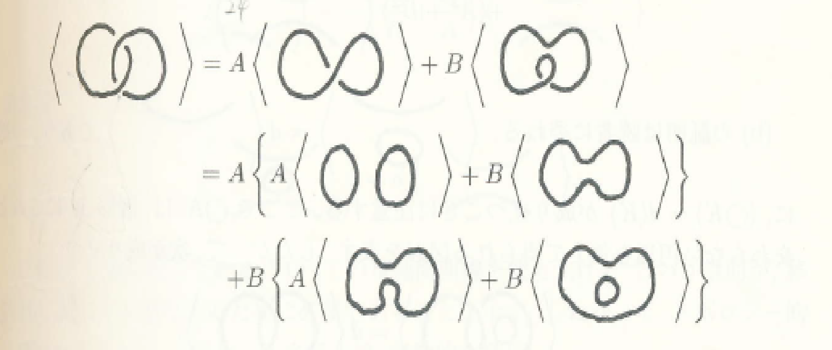
分かりやすいように例を載せる.



A 分離をして K から得られた図形を K', B 分離をして K から得られた図形を K'' とすると $\langle K\rangle = a\langle K'\rangle + B\langle K''\rangle$ のように表せることが分かる. 分離は局所的に行っているため, 命題が正しいことが示せる.

命題 (ブラケット多項式)

また, この式はブラケット多項式を計算するためにも用いられる. 例えば, 次のように使用する:



$$= A^2 d^{2-1} + ABd^{1-1} + BAd^{1-1} + B^2 d^{2-1}$$

$$= A^2 d^1 + 2ABd^0 + B^2 d^1.$$

ブラケット多項式

構成を表す式は作れたが, 今のままだとトポロジー的な不変量ではない.

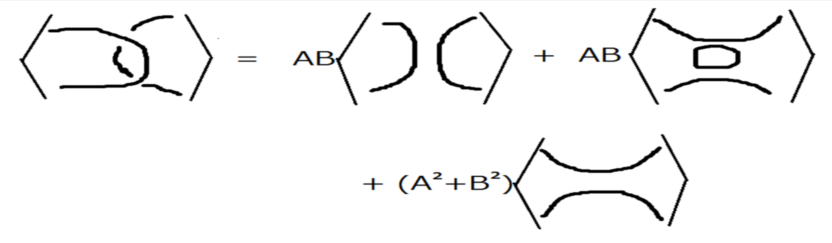
ブラケット多項式

構成を表す式は作れたが, 今のままだとトポロジー的な不変量ではない.

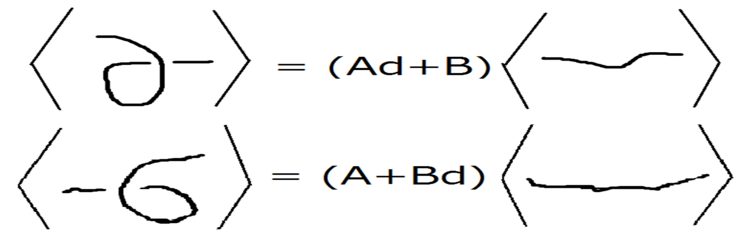
$\rightarrow$ 先ほど示した命題を上手く利用し, ライデマイスター移動を導入する.

ライデマイスター移動の導入

まず, 以下の結び目を先ほどの命題を利用し解くと, 次のようになる:



(a)

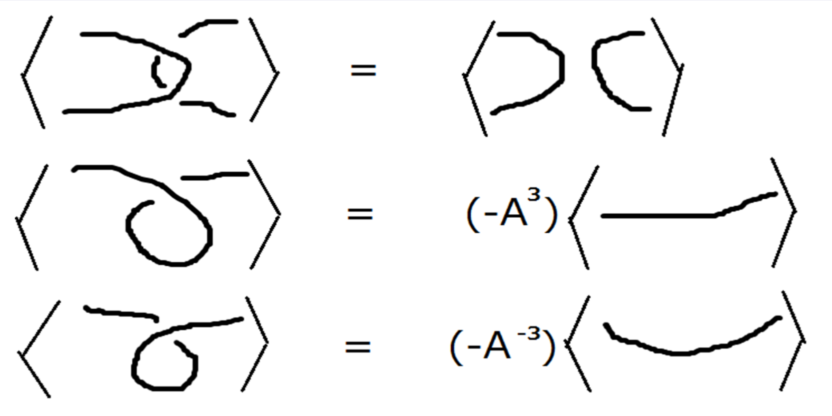


(b)

ステイトとブラケット多項式

ライデマイスター移動の導入

ここで $B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$ とすると次が成り立つ:

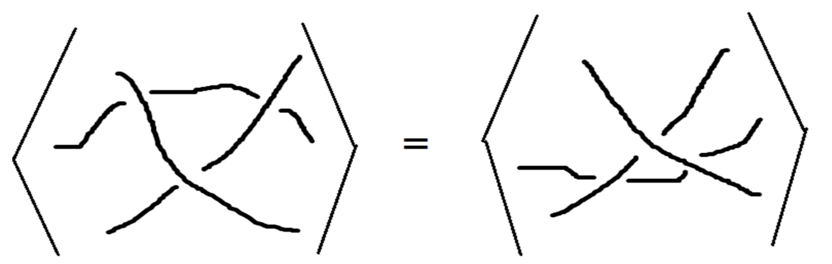


(a)(b)

(a) より, 多項式 $\langle K \rangle$ がライデマイスター移動 2 において不変であることが言えた.

ライデマイスター移動の導入

さらに, $B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$ かつ **(a)** を利用するとライデマイスター移動 3 も不変であることを示せる.**(証明略)**



全同位の不変量を求めるためには, ライデマイスター移動 **1** において正規化出来れば良い. 都合が悪い部分を打ち消すことを考える.

正規化ブラケット多項式

定義 (捻り数)(*writhe*))

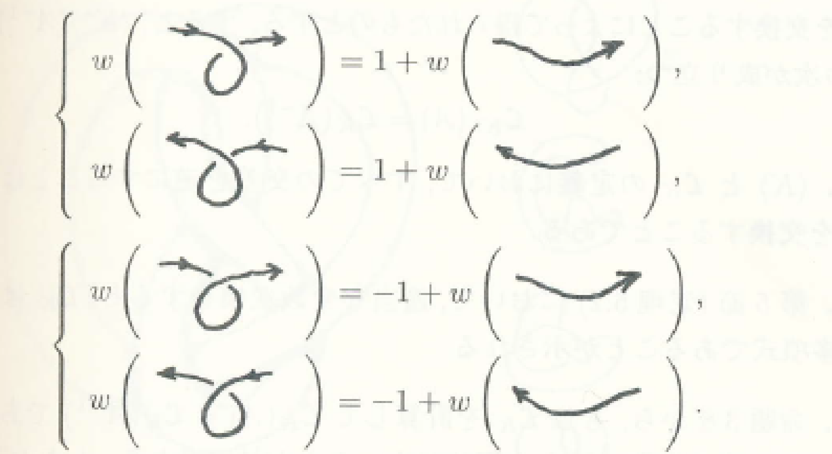
K を有向絡み目の図形表示とする. K の**捻り数** $\omega(K)$ を次の等式によって定義する:

$$\omega(K) = \sum_{p} \varepsilon(p)$$

ここで, p は K の全ての交差点に渡って動き, $\varepsilon(p)$ は次の規則で交差点を定める:

正規化ブラケット多項式

$\omega(K)$ は正則同位の不変量であり, 次が成り立つ:



定義 (正規化ブラケット多項式)

有向絡み目 K に対して, 正規化ブラケット多項式 $\mathcal{L}_K$ を次の公式で定義する:

$$\mathcal{L}_k = (-A^3)^{-\omega(K)}\langle K\rangle.$$

この公式はライデマイスター移動によって変化を伴わない. 従って全同位の不変量となる.

今後の課題

Alexander 多項式等を導き, 3 次元多様体まで拡張するのが第一の目標となるので, めげずに頑張りたい.

結び目をペイントで描くのがつらかった. せっかくブラケット多項式があるんだから *tex* で多項式書いたときに勝手に結び目書ける機能あってもよくない? それとも僕が勤しむべきか...

参考文献

[1] L. H. カウフマン (訳) 鈴木晋一, 河内明夫 1995 年, 培風館