あみだくじの数学

BV15035　佐藤 晶子

2016 年 5 月 16 日

目次

第 1 章

あみだくじの性質

1.1 研究動機

ガロア理論の本を読んでいると, 群論にぶつかった. 群論の本を読んでみると, 群の一つの具体例としてあみだくじが挙げられていた. 私たちの身近にあるあみだくじが数学的にどのようなものであるかに興味を持ち, 調べてみようと思った.

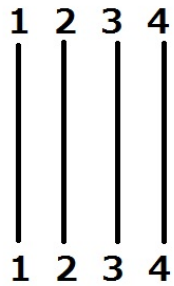
1.2 あみだくじの定義

初めに, あみだくじについて定義する.

定義 1.1. あみだくじとは, 下記の条件を満たすもののことである.

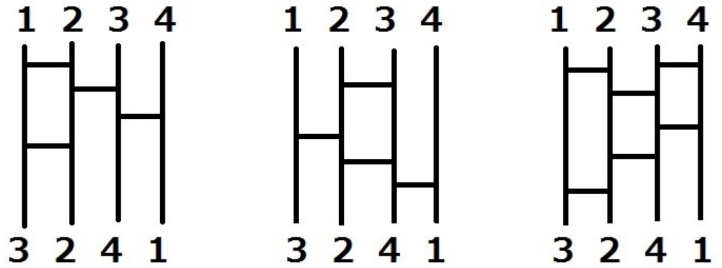
- 上段から始まり, 常に下に向かって道を辿り, 下段に向かう.
- 真横に引いた横線によって隣り合う縦線が繋がったときには, それぞれ繋がった縦線に移る. 但し, 一本の横線で繋げられる縦線は必ず二本とする.

横線が 0 本あみだくじを, **あみだくじの原型**とする. たとえば縦線の数を n とすると, $n=4$ のとき,

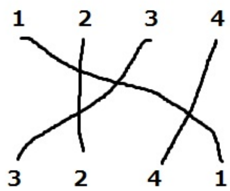


この状態のあみだくじのことを, あみだくじの原型と呼ぶ.

あみだくじは横線の本数を増やすことで, 無限に作ることが出来る. しかしここでは, 結果として同じになるあみだくじは同一のものと見なすことにする. たとえば, 下記のあみだくじはすべて同じものである.



このとき, 縦棒の数 n のあみだくじの総数は $n!$ 通りとなる. 横棒の数を m とすると, 上図では左 2 つは $m = 4$, 右は $m = 6$ である. m の値が最小のあみだくじを**最適あみだくじ**と呼ぶことにする.
この最適あみだくじは, 下図を描くことで視覚的に得られる:



たとえば上図では 4 つの交点がある. これは, 4 回の互換で (3 2 4 1) の最適あみだくじが得られるということである.

また, あみだくじは $\Omega = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ の n 個からなる集合上のすべての**置換**として考えられる. $\Omega = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 上の任意の置換は, たとえば $n = 4$ のとき (3 2 4 1) となる置換では, 次のように表す :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

また, 置換の中でも二つの要素を交換するだけのものを特に**互換**という.

ここで, 最適あみだくじは, 置換 f を最小の互換で行ったものと言い換えることができる. つまり,

$$(1\ 2\ 3\ 4) \to (2\ 1\ 3\ 4) \to (2\ 3\ 1\ 4) \to (2\ 3\ 4\ 1) \to (3\ 2\ 4\ 1)$$

であるから,

$$(3\ 2\ 4\ 1) = (1\ 2) \circ (1\ 3) \circ (1\ 4) \circ (2\ 3)$$

と表せる. (3 2 4 1) の最適あみだくじは, 4 回の置換で得られる（横線の最小本数は $m = 4$）.

1.3　行き先が重複しない理由

ところで, Ω 上の置換を合成したものも Ω 上の置換となるのか. このことは, あみだくじを見れば成り立つことは明らかであるが, 全射・単射の定義に基づいて証明したい (全射・単射の定義については 3 章参考). そのためにまず, あみだくじが全単射であることを示す.

あみだくじが全単射であるとは, 同じ場所からスタートして違う場所にゴールすることはなく, 違う場所からスタートして同じ場所にゴールすることもないということである. あみだくじが違う場所からスタートしたら必ず違う場所に辿り着くことを証明したい.

定理 1.1. あみだくじは全単射である.

証明. この証明は数学的帰納法を用いて行う.

あみだくじの縦線の数を n, 横線の数を m とする.
初めに, $m = 0$ の時を考える. このときあみだくじが全単射であることは明らか.
次に, $m = k$ のときにあみだくじが全単射であると仮定する. 横線の本数が $m = k + 1$, すなわち $m = k$ のあみだくじに横線を一本追加したとき, あみだくじは局地的に互換が起こるだけである. したがって, このときもあみだくじは全単射である. ■

定理 1.2. 集合 Ω 上の任意の置換 f, g に対し, f, g の合成 $g \circ f$ も Ω 上の置換となる.

証明. x, x' を Ω の相異なる任意の二元とすると, f は単射であるから,

$$f(x) \neq f(x')$$

g も単射であるから,

$$g(f(x)) \neq g(f(x'))$$

すなわち, $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ が成り立つ. よって, $g \circ f$ は単射である.
一方, g は全射であるから, Ω の任意の元 y に対し, $g(w) = y$ となる Ω の元 w が存在する. また f も全射であるから, $f(x) = w$ となる Ω の元が存在する. そこで,

$$g(f(x)) = g(w) = y$$

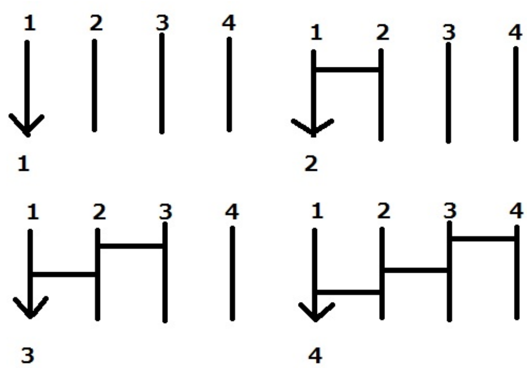
が成り立つ. よって $g \circ f$ は全射である.
したがって, Ω から Ω への写像 $g \circ f$ は全単射になるので, $g \circ f$ は Ω 上の置換となる. ■

1.4　すべての順列のあみだくじを作れるか？

ところで, $n!$ 通りのあみだくじのすべての順列をあみだくじで作ることはできるのだろうか. 次に, あみだくじはすべてのパターンを作ることが出来ることを証明する.

定理 1.3. あみだくじはすべてのパターンを作ることが出来る.

証明. 証明するためには, 任意の数が左端に下ろせることを示せば良い.
ここでは分かりやすくするため, $n = 4$ のあみだくじで考えてみる. 上段の 1〜4 の数字は, 下図のように横線を入れることで左端に下ろすことが可能である. 同様にして, 左端に下ろした数に影響を与えないように考慮しつつ, 任意の数を左から 2 番目に下ろし, 左から 3 番目、右端と下ろしていくことで任意の順列のあみだくじを作ることが出来る.



以上で題意は満たされた. ∎

1.5　横線の奇偶について

前図で $m=4,\ 6$ となる同一のあみだくじがあった, このあみだくじの最適あみだくじは, もちろん, $m=4$ のときであるが, 最適あみだくじに拘らなければ, $m=4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots$ と m が偶数本であれば作成は可能である. 実際に作成すれば明らかだろうが, このあみだくじは m が奇数の時には作成不能である. なぜか？
率直に言えば, 恒等置換が偶数だからである. 次では, その理由を厳密に示していく.

定理 1.4. $\Omega=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 上の任意の置換 f は, いくつかの互換 $h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_l$ の合成関数 $h_1\circ h_2\circ\cdots\circ h_l$ として表され, l が偶数であるか奇数であるかは f によって一意的に定まる.

証明. 最初に e（恒等置換）がいくつかの互換 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r$ の合成置換として,

$$e=k_1\circ k_2\circ\cdots\circ k_r \tag{1.1}$$

と表されたとすると, r は偶数になることを示す.
まず Ω の元 1 が現れる k_i があるとし, それらのうちで i が最大になるものを改めて $k_i=(1\ \alpha)$（α は 1 と異なる Ω の元）とする. ここで, $i\neq 1$ である.
何故ならば, もし $i=1$ とすると 1 の行き先を考えれば, (1) 式の右辺は e と異なるものになってしまう. 言い換えれば, $i=1$ の時, i より先に 1 が出てこなければ恒等置換にはならない. i は最大の数であるから, $i\neq 1$ である.
ここで, k_{i-1} は次の 4 通りのどれかになる.

（ア）$(1\ \alpha)$
（イ）$(1\ \beta)$
（ウ）$(\alpha\ \beta)$
（エ）$(\beta\ \gamma)$

そして, （ア）, （イ）, （ウ）, （エ）それぞれの場合に対して, 下の等式が成り立つ.

（ア）$k_{i-1}\circ k_i=e$
（イ）$k_{i-1}\circ k_i=(1\ \beta)\circ(1\ \alpha)=(1\ \alpha\ \beta)=(1\ \alpha)\circ(1\ \beta)$
（ウ）$k_{i-1}\circ k_i=(\alpha\ \beta)\circ(1\ \alpha)=(1\ \beta\ \alpha)=(1\ \beta)\circ(\alpha\ \beta)$
（エ）$k_{i-1}\circ k_i=(\beta\ \gamma)\circ(1\ \alpha)=(1\ \alpha)\circ(\beta\ \gamma)$

この操作を行うことで, 1 と互換するものが前へと移動している.
(1.1) 式の右辺の $k_{i-1}\circ k_i$ に上の等式を代入したものを,

$$e=k_1'\circ k_2'\circ\cdots k_s' \tag{1.2}$$

とすれば, (1.2) 式の右辺の互換の個数 s は $r-2$ または r（（ア）の場合は $r-2$, それ以外では r）と等しく, さらに Ω の元 1 が現れる k_j に対しては $j\leq i-1$ が必ず成り立つ.
次に, (1.2) に対しても (1.1) 式に対する議論と同じことを行い, さらにその議論をできるというところまで繰り返して行ったものを

$$e=g_1\circ g_2\circ\cdots\circ g_t \tag{1.3}$$

とする. ここで全ての互換 g_i に Ω の元は現れず, s と同様, t と r の偶奇性は一致する.

していけば, いずれ右辺は e になる. したがって t は偶数であることがわかる. よって, r は偶数である.
いま, f がいくつかの互換の合成として,

$$f = h_1 \circ h_2 \circ \cdots \circ h_l = h'_1 \circ h'_2 \circ \cdots \circ h'_m$$

と 2 通りに表されたとする. ここで, $l+m$ が偶数であることを示せば l と m の偶奇性は一致する.
上式の右の等式の両辺に左から

$$h_l \circ h_{l-1} \circ \cdots h_2 \circ h_1$$

を作用させると,

$$(h_l \circ h_{l-1} \circ \cdots h_2 \circ h_1)(h_1 \circ h_2 \circ \cdots \circ h_l) = (h_l \circ h_{l-1} \circ \cdots h_2 \circ h_1)(h'_1 \circ h'_2 \circ \cdots \circ h'_m)$$

となるので, 証明の前半に示したことから, $l+m$ は偶数になる. ∎

上の証明は, 一般的な置換について, それが偶置換であるか奇置換であるかは生来的に決まっていることを示している. 長くてややこしいので, 少し易しい証明を次に示す:

定理 1.5. ある置換が偶置換か奇置換かは生来的に決まっている.

証明. 任意の互換を二乗すると, 元の状態に戻る. これは, たとえば, あみだくじの原型において,

$$(1\ 2) \circ (1\ 2)$$

という互換を行うと, あみだくじの原型に戻ることから, これは明らかである. 単位元は互換の二乗で表現できる偶置換であるといえる. （集合 M とその上の二項演算*が定義されているとき, M のすべての元 a に対して, $a * e = e * a = a$ を満たすときに, e を単位元という. ）
さて, 任意の偶置換 g が, 他の表し方 f を持つとする $(g = f)$.
g には逆元があるので, 両側からかけると, $g^{-1}f = e$.
g^{-1} と e はそれぞれ偶置換だから, f も偶置換である.
奇置換についても同様である. ∎

第 2 章

あみだくじから群論へ

定義 2.1. 群の定義（群の公理）
空集合でない集合 G に演算*が定義されているとき, 次の条件 (1)〜(4) を満たすならば G は*に関して群であるという. さらに (5) も合わせて満たすならば, G は*に関して可換群またはアーベル群という.

(1) 演算*に関して閉じている
(2) 任意の元に対して, 結合法則が成り立つ. $(a * b) * c = a * (b * c)$
(3) 単位元が存在する. $a * e = e * a = a$
(4) 任意の元に対して, その元に対する逆元が存在する. $a * b = b * a = e$
(5) 任意の元に対して, 交換法則が成り立つ. $a * b = b * a$

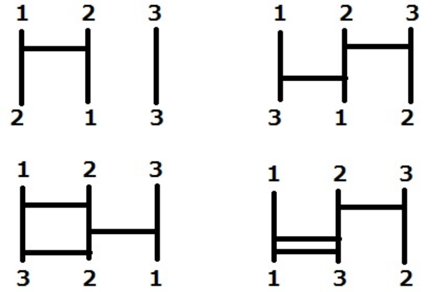
群論は群の定義から始まるが, 非常に抽象的な概念であるため, 具体例がないと想像が難しい. そこで, 群の一つの例としてあみだくじを考える. 今まで見てきたあみだくじの性質は, 群の性質を満たしている.

群の定義を踏まえて, あみだくじが群であることを示す.

定理 2.1. あみだくじは群である.

証明. 演算*をあみだくじの合成とする.
このとき, あみだくじは全単射であるから (1) を満たす.
あみだくじを合成したものもあみだくじになることが示されているので, (2) を満たす.
単位元 e とはあみだくじの原型のことであるから, (3) を満たす.
これは適当な $n!$ 通りのあみだくじの順列から, さらにあみだくじをつなげて $(1\ 2\ \cdots\ n)$ に戻せる, ということである. これはあみだくじをひっくり返せば任意の順列から $(1\ 2\ \cdots\ n)$ という順列を成すあみだくじを作成できるので, (4) を満たす.
以上より, あみだくじは群であることが示された. ∎

また, 交換法則については満たさない. 例として $(2\ 1\ 3) \circ (3\ 1\ 2) = (3\ 1\ 2) \circ (2\ 1\ 3)$ であるかを考えると,



$(2\ 1\ 3) \circ (3\ 1\ 2) = (3\ 2\ 1)$, $(3\ 1\ 2) \circ (2\ 1\ 3) = (1\ 3\ 2)$ であるから, 交換法則が成り立つとは限らないことがわかる. したがって, あみだくじは可換群ではない.
また, あみだくじは置換群, 対称群としても知られている.

第 3 章

用語集

- 集合 (*set*)
  ものの集まり
- 写像 (*mapping, map*)
  X, Y を空でない集合とする. 集合 X の各元に集合 Y の元をそれぞれ 1 つ対応させる規則 f が与えられたとき, この規則を集合 X から Y への**写像**と呼ぶ.
- 合成写像 (*compositemapping*)
  f を集合 X から集合 Y への写像, g を Y から集合 Z への写像とする. X の各元 x に対して x の f による像 $g(f(x))$ を対応させる X から Z への写像を写像 f と g の**合成写像**と呼ぶ.
- 全射 (*surjection*)
  Y を任意の元 y に対して, $f(x) = y$ となる X の元 x が存在するとき, X から Y への写像を**上への写像**または**全射**と呼ぶ.
  $$^\forall y \in Y,\ ^\exists x \in X\ s.t.\ f(x) = y$$
- 単射 (*injection*)
  X から Y への写像が条件
  $$x,\ x' \in X,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$
  を満たすとき, X から Y への写像を**単射**と呼ぶ.
- 全単射 (*bijection*)
  全射でありかつ単射である写像を**全単射**と呼ぶ.
- 逆写像 (*inversemapping*)
  X から Y への写像が全単射であるとき, Y のどのような元 y に対しても $f(x) = y$ となる X の元 x がただ一つ存在する. そこで, $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となるただ一つの元 $x \in X$ を対応させることによって, X から Y への写像が決まる. この写像を X から Y への写像を**逆写像**と呼ぶ.
- 可逆 (*invertible*)
  X から Y への写像の逆写像が存在するとき, この写像は**可逆**であるという.
- 置換 (*permutation*)
  集合 X から Y への全単射のうち, とくに $X = Y$ である（可逆である）ものを X 上の**置換**と呼ぶ. 置換はあみだくじのことと捉えて問題ない.
- 恒等置換
  X の各元 x を x 自身に対応させる写像をとくに**恒等写像**, あるいは X 上の**恒等置換**と呼ぶ.

＜参考文献＞[1] 斎藤毅:線形代数の世界　抽象数学の入り口, 2007, 東京大学出版会 [2] 芳澤光雄:群論入門　対称性をはかる数学, 2015, 講談社 [3] 福田拓生:集合への入門 [無限をかいま見る], 2012, 培風館

ぎしっぽ]」, hooktail.sub.jp/algebra/Symmetric Group/, (2016, 4, 28)