ペル方程式の解

芝浦工業大学　数理科学研究会

平成 28 年 4 月 24 日

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

制作: BP15039　澤崎航輔

目 次

1　前書きと研究動機

今回のペル方程式の研究は 2015 年に開催された芝浦祭での研究発表の続編に位置する．なので前回の内容にプラスアルファの内容を加えてこの資料を作成した．その点をご了承願いたい．ペル方程式を研究した動機は, 大学受験の勉強中に数学の問題で出題されたペル方程式に関する問題が解けずそこからペル方程式に興味を抱いたことからである．大学の図書館で整数分野の書籍を借りて整数分野の学習をしてからインターネットなども用いてペル方程式の研究を行った．

注意点としては私は数学も計算も苦手である．従って読み進めていくうちにおかしい個所を見つけることがあると思われるがその習性は読者に任せることとしている．

2　ペル方程式について

ペル方程式とは d を平方数ではない自然として下記の方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の整数解の組 $(x,\, y)$ を求める問題である．このとき $(x,\, y)$=$(a,\, b)$ がペル方程式の解であるならばまた $(-a,\, b)$, $(a,\, -b)$, $(-a,\, -b)$ もまたペル方程式の解となる．よってこの研究では $(x,\, y)$ の条件を自然数とする．ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

は d の値によって $(x,\, y)$ の組が決まる．

3　ペル方程式の解

ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の解 $(x,\, y)$ に対して

$$x + \sqrt{d}y$$

を最小値にするような $(x,\, y)$ の組をそれぞれ $(x,\, y)$=$(X,\, Y)$ とおき, これをペル方程式の最小解と呼ぶことにする．またペル方程式の最小解とそれ以外のペル方程式の解をペル方程式の一般解と呼ぶことにする．

ペル方程式の一般解

ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の解の組に対して

$$x + \sqrt{d}y (> 1)$$

を最小値にするような $x,\, y$ の組をそれぞれ $X,\, Y$ とし, $x_n,\, y_n$ をペル方程式の解とする．ただし n は正の整数とする．このときペル方程式の解は

$$x_n + \sqrt{d}y_n = (X + \sqrt{d}Y)^n$$

で求めることができる．ただし $x_1 = X,\, y_1 = Y$ である．

- $n=1$ のとき
$$x_1+\sqrt{d}y_1=X+\sqrt{d}Y$$
だが最初から $x_1=X,\, y_1=Y$ としていたから $n=1$ のときは成立.

- $n=k(\geq 1)$ のとき
$$x_k+\sqrt{d}y_k=(X+\sqrt{d}Y)^k$$
とするときに $x_k,\, y_k$ がペル方程式
$$x^2-dy^2=1$$
の解となることを仮定する. 次に $n=k+1$ のとき
$$\begin{aligned}x_{k+1}+\sqrt{d}y_{k+1}&=(X+\sqrt{d}Y)^{k+1}\\&=(X+\sqrt{d}Y)^k(X+\sqrt{d}Y)\\&=(x_k+\sqrt{d}y_k)(X+\sqrt{d}Y)\\&=Xx_k+dYy_k+\sqrt{d}(Yx_k+Xy_k)\end{aligned}$$
と変形できるので, これを比較すると $x_{k+1},\, y_{k+1}$ がそれぞれ
$$\begin{cases}x_{k+1}=Xx_k+dYy_k\\y_{k+1}=Yx_k+Xy_k\end{cases}$$
となるのでこれをペル方程式
$$x_{k+1}^2-dy_{k+1}^2=1$$
に代入をする.
$$\begin{aligned}x_{k+1}^2-dy_{k+1}^2&=(Xx_k+dYy_k)^2-d(Yx_k+Xy_k)^2\\&=X^2x_k^2+2dXYx_ky_k+d^2Y^2y_k^2-d(Y^2x_k^2+2XYx_ky_k+X^2y_k^2)\\&=(X^2-dY^2)x_k^2+d(dY^2-X^2)y_k^2\\&=(X^2-dY^2)x_k^2-d(X^2-dY^2)y_k^2\end{aligned}$$
ここで X, Y はそれぞれペル方程式
$$x^2-dy^2=1$$
の解となっているので
$$X^2-dY^2=1$$
である. これを代入して
$$x_{k+1}^2-dy_{k+1}^2=x_k^2-ydy_k^2$$
さらに仮定より x_k と y_k もペル方程式
$$x^2-dy^2=1$$
であるので
$$x_k^2-dy_k^2=1$$
である. よってこれを代入すると
$$x_{k+1}-dy_{k+1}^2=1$$
となるので x_{k+1} と y_{k+1} もペル方程式
$$x^2-dy^2=1$$
の解となるので $n=k+1$ のときも成立する.

これより数学的帰納法からペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の解は自然数 n を用いることで

$$x_n + \sqrt{d}y_n = (X + \sqrt{d}Y)^n$$

で表現できることが示せる (証明完了).

ペル方程式の解はある程度規則的な計算によって求めることができる. 以下に紹介する方法ではペル方程式 $x^2 - dy^2 = 1$ の他に, $x^2 - dy^2 = -1$ の解も求まる場合もあり. 具体的には

- 特殊な数列を用いて最小解を決定してから続けて一般解を求める方法
- $\sqrt{d}$ の連分数展開を用いた方法

の 2 つの方法を今回紹介することにする. この 2 つの方法は比較的機械的な計算をすることで手計算でもペル方程式の解を求めることができる. また今回の研究では C 言語によって作成したプログラムを用いて数値的にもペル方程式の解を求めることにした.　最後にペル方程式の解の例について少し紹介する.

例 3.1

- $d = 2$ のときのペル方程式

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

の最小解 (X, Y) は $(X, Y) = (3, 2)$ である. またこのときのペル方程式の一般解は以下のようで

$$\begin{aligned}(x, y) &= (3, 2)\\ &= (17, 12)\\ &= (99, 70)\\ &\ \ \vdots\end{aligned}$$

となっている.

- $d = 29$ のときのペル方程式

$$x^2 - 29y^2 = 1$$

の最小解 (X, Y) は $(X, Y) = (9801, 1820)$ である.

- $d = 61$ のときのペル方程式

$$x^2 - 61y^2 = 1$$

の最小解 (X, Y) は $(X, Y) = (1766319049, 226153980)$ である.

ペル方程式の最小解は d の値によってはしらみつぶし求めることが非常に難しい. よって次の章からはペル方程式の解を機械的に求める方法を紹介する.

3.1 特殊な数列を用いたペル方程式の最小解の決定

3.1.1 方法の紹介

この章ではペル方程式の解を特殊な数列を用いて決定する方法を紹介する. 特殊な数列を用いてペル方程式の最小解を求める場合はまず最小解 (X, Y) を計算して求めてからその最小解を用いて続けて一般解を求めていく.

ペル方程式の最小解を求めるための数列

$$a_{-1} = \sqrt{d}, a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = a_{n-1} + k_n a_n$$
$$k_n = [b_n]$$
$$b_n = -\frac{a'_{n-1}}{a'_n}$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{b_n - k_n}$$

ただし a を無理数としたときに a の共役な無理数を a' と表すことにする．$b_n(n \leq 1)$ の分母を 1 にするような n のときにその n に対する a_n が最小解を与える．

この数列を用いてペル方程式の最小解を求めて決定することができるが, この場合, $x^2-dy^2=1$ だけでなく, $x^2-dy^2=-1$ の解を求まる場合もあるがそれについては後述する．

ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の最小解 (X, Y) を求めた後は以下の式を用い

$$x + \sqrt{d}y = (X + \sqrt{d}Y)^n$$

として代入し, 両辺を $\sqrt{d}$ のある部分とそうでない部分で比較することでペル方程式の解を一般解を求めることができる．

3.1.2 実際に計算をしてみる

方法論の紹介だけだと本当に求められるかは不明なので簡単な例を用いて実際に計算をする．今回の例では $d = 2$ の場合を例として紹介する．ペル方程式

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

に対して以下のような数列を設定する．

$$a_{-1} = \sqrt{2}, a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = a_{n-1} + k_n a_n$$
$$k_n = [b_n]$$
$$b_n = -\frac{a'_{n-1}}{a'_n}$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{b_n - k_n}$$

として計算をすることにする．

$$b_0 = -\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$
$$k_0 = [b_0] = [\sqrt{2}] = 1$$
$$a_1 = \sqrt{2} + 1 \cdots 1$$
$$= 1 + \sqrt{2}$$
$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$
$$= \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}$$
$$= 1 + \sqrt{2}$$

となるので a_1 がペル方程式 $x^2-2y^2=1$ の最小解を与える可能性があるので比較して確認をすると

$$X+\sqrt{2}Y=1+\sqrt{2}$$

となりこれを比較して計算すると最小解は (X,Y)=(1, 1) と求まるので確認する．

$$\begin{aligned}1^2-2\cdot1^2&=1-2\\&=-1\end{aligned}$$

となるのでこれは $x^2-2y^2=1$ の解ではなく，$x^2-2y^2=-1$ の解である．そこで $(1+\sqrt{2})^2$ としてみると

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^2&=1^2+2\sqrt{2}+\sqrt{2}^2\\&=3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となり

$$X+\sqrt{2}Y=3+2\sqrt{2}$$

として比較して計算すると最小解は (X,Y)=(3, 2) と求まるので確認する．

$$\begin{aligned}3^3-2\cdot2^2&=9-8\\&=1\end{aligned}$$

となるのでこれが最小解であると確認できる．またこれを利用して $x^2-2y^2=1$ の一般解を求めるには次のようにすれば良い．x と y がペル方程式の一般解とするならば $n\in\mathbb{N}$ を用いて

$$x+\sqrt{d}y=(3+\sqrt{d}2)^n$$

として $\sqrt{d}$ のかかる部分とそうでない部分で比較すれば良いので例えば $n=2$ とすると

$$\begin{aligned}x+\sqrt{d}y&=(3+2\sqrt{2})^2\\&=9+12\sqrt{d}+8\\&=17+12\sqrt{2}\end{aligned}$$

となるので比較すると一般解が (x,y)=(17, 12) として求まる．また $n=3$ としてすると

$$\begin{aligned}x+\sqrt{d}y&=(3+2\sqrt{2})^3\\&=27+54\sqrt{2}+72+16\sqrt{2}\\&=99+70\sqrt{2}\end{aligned}$$

となるのでこれがまた一般解として (x,y)=(99, 70) が求まる．このように $n\in\mathbb{N}$ と最小解 X, Y を用いれば，その後の一般解を求めることができる．

3.2　連分数展開を用いたペル方程式の最小解の決定

この章では連分数を用いてペル方程式の解を求める方法を紹介する．連分数を用いてペル方程式の最小解を決める場合，ひたすら機械的に計算するだけで解くことができるし，また最小解を求めてしまえば前章で紹介した比較する方法で一般解を求めることも可能である．ここではまず連分数と，解を求めるのに必要となる連分数展開を紹介した後に具体的にそれをどう用いてペル方程式の解を求めるのかを紹介する．

3.2.1　連分数

まずは連分数の概略を説明する．通常私たちが使う分数は下のように

$$\frac{a}{b},\frac{1}{2},\frac{\pi}{e}$$

となり分数の中に分数が出てこないようなものを使う場合が多い．一方で連分数というものは分数の分母にさらに分数が含まれているものである．もちろん分数の分母に分数が含まれていてその分母に含まれている分数にさらに分数が含まれていて... などということもある．具体的に連分数を紹介すると

$$1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5}}$$

などである．例えば上の例を普通の分数に直してみると．

$$\begin{aligned}1+\frac{2}{3+\frac{4}{5}} &= 1+\frac{10}{15+4}\\ &= 1+\frac{10}{19}\\ &= \frac{29}{19}\end{aligned}$$

となって普通の分数に戻すことができた．

3.2.2 連分数展開

次にペル方程式をを求めるのに必要となる連分数展開を紹介する．たとえばある分数

$$\frac{a}{b}$$

を連分数

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots}}}$$

と変形することを連分数展開と呼ぶ．特に a_0 を整数, a_i が正の整数 $(1 \leq i \leq n)$, $b_j = 1(1 \leq j \leq n)$ であるような連分数

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}$$

を正則な連分数と呼び, このように変形することを正則連分数展開と呼ぶ．ただし今後は正則連分数展開を多く扱うので基本的に正則連分数展開することを単に連分数展開と呼ぶことにする．連分数展開するとスペースを多く使ったりしていしまうので多くの場合は下のように

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$$

等と表す．この研究においても上記のように表現することにするが基本的に計算をする場合はなるべく省かないように努力する．

例として $\dfrac{29}{19}$ を連分数展開する．

$$\begin{aligned}\frac{29}{19} &= 1+\frac{10}{19}\\ &= 1+\cfrac{1}{\cfrac{19}{10}}\\ &= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{9}{10}}\\ &= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{10}{9}}}\\ &= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9}}}\\ &= [1; 1, 1, 9]\end{aligned}$$

となる．また

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9}}}=1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5}}$$

であることもわかる．ちなみに有理数を連分数展開する場合は連分数展開は有限回で終了する．連分数展開を行っていく場合

$$\frac{a}{b}$$

を展開するならば下のように

$$s+\frac{v}{w}$$

とする．このとき s は整数で $\frac{v}{w}<1$ となるようにする．

3.2.3　無理数の連分数展開を用いてペル方程式の解を求める

準備が整ったのでいよいよ連分数展開を用いてペル方程式の解を求める．連分数展開でペル方程式の解を求めるには $\sqrt{d}$ を連分数展開すればよい．例えば

$$x^2-2y^2=1$$

の 3 つの解を順番に並べるとそれぞれ

$$\begin{aligned}(x,y)&=(3,2)\\&=(17,12)\\&=(99,70)\end{aligned}$$

である．まず $\sqrt{2}$ を 1 回だけ連分数展開してみる．

$$\begin{aligned}\sqrt{2}&=1+(\sqrt{2}-1)\\&=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}\\&=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}\\&=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\end{aligned}$$

とここまで展開することができる．今求めた展開を順次代入してみると

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}\\ &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}\\ &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}\\ &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}}\\ &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}}}\\ &\vdots\\ \sqrt{2} &= [1;2,2,2,2,\cdots]\end{aligned}$$

と $\sqrt{2}$ を連分数を用いて表現することができた．このとき式の 2 列目の

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

において無理数の部分を無視してみると

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

となる．これの分子, 分母をそれぞれ a_n, b_n とおくことにすると

$$\begin{cases}a_n=3\\ b_n=2\end{cases}$$

となるがこれは $d=2$ のときのペル方程式

$$x^2-2y^2=1$$

の解となる．$(x,\ y)$=(3, 2) は解になる．これと同じことを繰り返すと

$$\begin{aligned}1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}} &= 1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}\\ &= 1+\frac{2}{5}\\ &= \frac{7}{5}\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{cases}a_n=7\\ b_n=5\end{cases}$$

となるが, これは

$$x^2-2y^2=-1$$

の解となる．更に同じことをしていくと

$$
\begin{aligned}
1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}} \\
&= 1+\cfrac{1}{\cfrac{12}{5}} \\
&= 1+\frac{5}{12} \\
&= \frac{17}{12}
\end{aligned}
$$

となるのでこれは $x^2-2y^2=1$ の解となる．同様に

$$
\begin{aligned}
1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}} &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{12}{5}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{12}} \\
&= 1+\frac{12}{24+5} \\
&= 1+\frac{12}{29} \\
&= \frac{41}{29}
\end{aligned}
$$

は $x^2-2y^2=-1$ の解となる．$\sqrt{2}$ を連分数展開すると周期 2 で

$$
\begin{cases}
x^2-2y^2=1 \\
x^2-2y^2=-1
\end{cases}
$$

の解を求めることができる．他の場合でも同様に連分数展開を用いることでペル方程式の解を定めることができる．

3.3 行列表現でペル方程式の解を求める

この章では行列を用いてペル方程式の一般の解を表現してみることにする．行列を用いる場合 d と d に対する最小解の値がわかっていれば行列の演算だけで解を求められる．よって結局は最小解をどう求めるかという話になってしまうが行列を用いてペル方程式の一般の解を表現してみよう．これを示すときにペル方程式の解は自然数 n を用いて

$$
\begin{cases}
x_{n+1}=Xx_n+dYy_n \\
y_{n+1}=Yx_n+Xy_n
\end{cases}
$$

と表されることがわかった．ペル方程式の解は

$$x+\sqrt{d}y=(X+\sqrt{d}Y)^2$$

の式を比較して求めることもできたり，$\sqrt{d}$ を連分数展開することでは最小の解なしに解を得ることができるが行列を用いる場合はやはり d の値とその値に対する最小解の値が必要になる．これを用いれば行列の演算のみで求めることができる．

$$\begin{cases} x_{n+1} = Xx_n + dYy_n \\ y_{n+1} = Yx_n + Xy_n \end{cases}$$

を行列表現してみると

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & dY \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & dY \\ Y & X \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と表現できる．例えば $d = 2$ とすると $X = 2, Y = 3$ となるがこれを代入してみて一般解を求めてみると $n = 1$ のときは最小解となるので $n = 2$ としてみて $x = 17, y = 12$ となることを確認する．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9+8 \\ 6+6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となってこれは $d = 2$ の場合のペル方程式

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

の解となることが確認できるのでペル方程式の解を行列表現で求めても良い．

4　d が平方数のときのペル方程式の解

ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

は x, y に整数, 自然数という条件をそれぞれ付加したとき,

- x, y が整数のときには d が平方数かどうかにかかわらずに $(x, y)=(1, 0)$ を解に持つ．
- x, y が自然数 $(x, y \geq 1)$ のときには d が平方数の場合は自然数解を持たない．

のようになる．特に今回は x, y は自然数なので d が平方数の場合は解を持たない．これを簡単な方法で証明することにする．このとき d を平方数と仮定したので新しい自然数 D を $d = D^2$ とする．

ペル方程式の自然数解

x, y を自然数とする．ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

はであるときに d が平方数である自然数ならば解の組になる x, y は存在しない．ただし新しい自然数 D を用いて $d = D^2$ とする．

(証明) ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

を次のように変形する．

$$y = \sqrt{\frac{1}{d}(x^2 - 1)}$$

と変形する．

- $x = 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{\frac{1}{d}(1-1)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{d}\cdot 0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

  となるので y は自然数とならない.

- $x = k$ のとき $(k \geq 1)$

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{\frac{1}{d}(k^2-1)} \\
&= \sqrt{\frac{k^2}{D^2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)} \\
&= \frac{k}{D}\sqrt{\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}
\end{aligned}
$$

  と変形できる. このとき θ を

$$
\theta = 1 - \frac{1}{k^2}
$$

  とおいておくと

  - $k = 1$ のとき $\theta = 0$
  - $k \geq 2$ のとき $\theta < 1$

  となるので θ が自然数とならないので結果として

$$
\frac{k}{D}\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}
$$

  が自然数とならない.

以上より d が平方数のときは $x,\ y$ の自然数の解の組を持たないことを証明できた (証明完了).

5 ペル方程式の解から $\sqrt{d}$ の近似値を得る

ペル方程式の解を用いることで $\sqrt{d}$ の近似値を得ることができる. ここでは $x,\ y$ を自然数 d を平方数ではない自然数として

$$
x^2 - dy^2 = 1
$$

の解を $(x_n,\ y_n)$ とおく $(x_n,\ y_n \in \mathbb{N})$. このとき

$$
\frac{x_n}{y_n}
$$

の値を計算して $\sqrt{d}$ の近似を得ることができる. 例として $\sqrt{2}$ を例とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1}{y_1} &= \frac{3}{2} = 1.5 \\
\frac{x_2}{y_2} &= \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} = 1 + 0.416\cdots = 1.416\cdots \\
\frac{x_3}{y_3} &= \frac{99}{70} = 1 + \frac{29}{70} = 1 + 0.4142\cdots = 1.4142\cdots
\end{aligned}
$$

といったように近似値を得ることができるがこれをわかりやすい方法で証明することにする. 今回は以下の 2 つを示してペル方程式の解から近似値を得ることを証明することにする. ただしペル方程式の最小解はそれぞれ $x_1 = X,\ y_1 = Y$ とする.

- 証明したいことは $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{d}$ である．これを証明するのに必要な柿 2 つをそれぞれ証明する．
  - x_n と y_n がそれぞれ
$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}\left\{(X+\sqrt{d}Y)^n + (X-\sqrt{d}Y)^n\right\} \\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left\{(X+\sqrt{d}Y)^n - (X-\sqrt{d}Y)^n\right\} \end{cases}$$
    と表せる．
  - $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X-\sqrt{d}Y}{X+\sqrt{d}Y}\right)^n = 0$ である．

まずは不等式
$$X+\sqrt{d}Y > X-\sqrt{d}Y$$
を示す．左辺から右辺を引いたものを計算すると
$$\begin{aligned} 左辺 - 右辺 &= X+\sqrt{d}Y - X + \sqrt{d}Y \\ &= 2\sqrt{d}Y \end{aligned}$$
ここで $d>1,\ Y\geq 1$ なので $2\sqrt{d}Y$ も $2\sqrt{d}Y>0$ となるから最初の不等式を証明することができた．次に不等式
$$X+\sqrt{d}Y > X-\sqrt{d}Y$$
の両辺を $X+\sqrt{d}Y$ で割ると不等式は
$$1 > \frac{X-\sqrt{d}Y}{X+\sqrt{d}Y}$$
となる．右辺は 1 より小さいことから
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X-\sqrt{d}Y}{X+\sqrt{d}Y}\right)^n = 0$$
を証明できた．次に x_n と y_n がそれぞれ
$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}\left\{(X+\sqrt{d}Y)^n + (X-\sqrt{d}Y)^n\right\} \\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left\{(X+\sqrt{d}Y)^n - (X-\sqrt{d}Y)^n\right\} \end{cases}$$
と表せること証明する．まずペル方程式の解は最小解 $X,\ Y$ を用いるとそれぞれ
$$x_n+\sqrt{d}y_n = (X+\sqrt{d}Y)^n$$
で表すことができる．このときの n を $n+1$ に置き換えると
$$x_{n+1}+\sqrt{d}y_{n+1} = (X+\sqrt{d}Y)^{n+1}$$
と表すことができる．この変形ののちほどの章でももう一度紹介するが今回は簡単に省略させてもらう．このときさらに上の式を変形すると
$$\begin{aligned} x_{n+1}+\sqrt{d}y_{n+1} &= (X+\sqrt{d}Y)(x_n+\sqrt{d}y_n) \\ &= (Xx_n+dYy_n)+\sqrt{d}(Yx_n+Xy_n) \end{aligned}$$
と変形できるからこれを連立漸化式として表現すると
$$\begin{cases} x_{n+1} = Xx_n + dYy_n \\ y_{n+1} = Yx_n + Xy_n \end{cases}$$
と表すことができる．更に変形すれば
$$\begin{cases} x_{n+1}+\sqrt{d}y_{n+1} = (X+\sqrt{d}Y)(x_n+\sqrt{d}y_n) \\ x_{n+1}-\sqrt{d}y_{n+1} = (X-\sqrt{d}Y)(x_n-\sqrt{d}y_n) \end{cases}$$

と表現できるのでそれぞれ数列 $x_n + \sqrt{d}y_n$, $x_n - \sqrt{d}y_n$ は初項 $X + \sqrt{d}Y$, $X - \sqrt{d}Y$, 公比 $X + \sqrt{d}Y$, $X - \sqrt{d}Y$, の等比数列なので

$$\begin{cases} (x_n + \sqrt{d}y_n) = (X + \sqrt{d}Y)^n \\ (x_n - \sqrt{d}y_n) = (X - \sqrt{d}Y)^n \end{cases}$$

となるので上記 2 式を用いると

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}\left\{(X + \sqrt{d}Y)^n + (X - \sqrt{d}Y)^n\right\} \\ y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{d}}\left\{(X + \sqrt{d}Y)^n - (X - \sqrt{d}Y)^n\right\} \end{cases}$$

となることが証明できる.

以上のことを用いて

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{d}$$

を証明する.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{X - \sqrt{d}Y}{X + \sqrt{d}Y}\right)^n = 0$$

を用いて $\dfrac{x_n}{y_n}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{d}}} \left\{\frac{(X + \sqrt{d}Y)^n + (X - \sqrt{d}Y)^n}{(X + \sqrt{d}Y)^n - (X - \sqrt{d}Y)^n}\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{d} \left\{\frac{1 + \left(\dfrac{X - \sqrt{d}Y}{X + \sqrt{d}Y}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{X - \sqrt{d}Y}{X + \sqrt{d}Y}\right)^n}\right\} \\ &= \sqrt{d} \end{aligned}$$

となるので証明完了. よってペル方程式の解を用いることで $\sqrt{d}$ の近似値を求めることができる.

6　ペル方程式の解の構造

ここではペル方程式の解の表現の方法などについてのべることにする.

6.1　ペル方程式の解を数値的に求める

まずはペル方程式の解を数値的に求めてみる. x, y を自然数, d を平方数ではない自然数として

$$x^2 - dy^2 = 1$$

に対して y の値を先に決定した後に方程式を満たす (x, d) の組を求めることにする. ただし今夏の解の出力を手計算でこなしていくのはとても大変なので自分で作成した C 言語のプログラムを用いて解の出力を行うことにした. まずは一例としてペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

を考える. x, y は自然数であり d は平方数ではない自然数である. このとき y は自然数なので y を $y = 1$ と固定して以下の方程式

$$x^2 - d = 1$$

として考えてみる. これに関してはプログラムを用いて解の出力を行った. 下の表に解の一覧を記述する. といったように出力されて解が求まる. 解は無限に存在するが無限には記述できないので最初の一部の解を表としてまとめた. 上の表

表 1: $y = 1$ のときの解の組

y	x	d	項数 n
1	2	3	1
1	3	8	2
1	4	15	3
1	5	24	4
1	6	35	5
1	7	48	6
1	8	63	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

を見ると x は 1 ずつ増えていることはすぐにわかる．また d に規則性があるかはすぐにはわかり辛いが, よくみれば d のふえはばの増え方は 2 ずつで固定である．

$$d \text{ の数列}: 3, 8{,}15, 24, 35, 48, 63, \cdots$$
$$d \text{ の増え幅の数列}: 5{,}7, 9, 11, 13, 15, \cdots$$
$$d \text{ の増え幅の増え方}: 2, 2, 2, 2, 2, \cdots$$

ということがわかる．つまり d の増え幅は等差数列になっている．これらの x, d は自然数 n を用いれば式として表すことができて $y = 1$ のときペル方程式

$$x^2 - d = 1$$

の解は

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = n + 1 \\ d = n(n + 2) \end{cases}$$

として表すことができる．項数 (順番の番号) を n とする．今回はこれが解となるのかを実際に確認する．

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = n + 1 \\ d = n(n + 2) \end{cases}$$

がペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の解の組となることを証明する．まずペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

を以下のように変形する．

$$y = \sqrt{\frac{1}{d}(x^2 - 1)}$$

このとき左辺 $= 1$ となる．よって右辺に次の 2 式

$$\begin{cases} x = n + 1 \\ d = n(n + 2) \end{cases}$$

を代入してそれらが自然数 n に対して解となることを確かめればよい．まず上の 2 式を代入すると

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{1}{n(n+2)}\{(n+1)^2-1\}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n(n+2)}(n^2+2n)} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるのでこれは解になる．念のため $n = k+1$ としても確かめてみることにすると $(k \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{1}{(k+1)(k+3)}\{(k+2)^2-1\}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(k+1)(k+3)}(k^2+4k+4-1)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(k+1)(k+3)}(k^2+4k+3)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{k^2+4k+3}(k^2+4k+3)} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので全ての自然数 n に対しても

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の解が

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = n+1 \\ d = n(n+2) \end{cases}$$

が解であることが証明できた．今回は $y = 1$ の場合の解の組 $(x,\, y,\, d)$ について考察した．同じように $y = 2$ の場合を記述すると．となる．同様に順番の番号は自然数 n を用いて表現をする．これも表を見ると x は番号 n が 1 増えるごとに x は

表 2: $y = 2$ のときの解

y	x	d	n
2	3	2	1
2	5	6	2
2	7	12	3
2	9	20	4
2	11	30	5
2	13	42	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

2 ずつ増えていることがわかる．同じように d を考えてみると以下のようになっている．

$$\begin{aligned} d \text{ の数列} &: 2, 6, 12, 20, 30, 42, \cdots \\ d \text{ の増え幅の数列} &: 4,6, 8, 10, 12, \cdots \\ d \text{ の増え幅の増え方} &: 2, 2, 2, 2, \cdots \end{aligned}$$

となっている．$y = 2$ の場合もやはり自然数 n を用いることで以下のように式で表現することができる．

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2n+1 \\ d = n(n+1) \end{cases}$$

となっている．今回は証明は省略するがこれもまたペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の解となることを確認することができる．他にも例として $y = 3$ の場合を紹介する．

表 3: $y = 3$ のときの解の組

y	x	d	n	k
3	8	7	1	1
3	10	11	2	1
3	17	32	3	2
3	19	40	4	2
3	26	75	5	3
3	28	87	6	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = \begin{cases} 9(k-1)+8(n \text{ が奇数}) \\ 9k+1(n \text{ が偶数}) \end{cases} \\ d = \begin{cases} 9(k-1)^2+16(k-1)+7(n \text{ が奇数}) \\ 9k^2+2k(n \text{ が偶数}) \end{cases} \end{cases}$$

また次には $y = 20$ の場合も以下のようである．

表 4: $y = 20$ のときの解の組

y	x	d	n	k
20	49	6	1	1
20	151	57	2	1
20	199	99	3	1
20	201	101	4	1
20	249	155	5	2
20	351	308	6	2
20	399	398	7	2
20	401	402	8	2
20	449	504	9	3
20	551	759	10	3
20	599	897	11	3
20	601	903	12	3

$$\begin{cases} y = 20 \\ x = \begin{cases} 200(k-1)+49 : n = 4m-3 \\ 200k-49 : n = 4m-2 \\ 200k-1 : n = 4m-1 \\ 200k+1 : n = 4m \end{cases} \\ d = \begin{cases} 100(k-1)^2-49(k-1)+6 : n = 4m-3 \\ 100k^2-k : n = 4m-2 \\ 100k^2+k : n = 4m-1 \\ 100k^2+49k+6 : n = 4m \end{cases} \end{cases}$$

これらの式の組はいずれもペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の解の組となっていて確かめるには実際に代入をすればよい.

6.2 解の場合分け

前章ではペル方程式の解をプログラムを用いて数値的に求めた. これによってペル方程式の解がどのように構成されているかある程度判明した. それを紹介する. 前章ではペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の解を y の値を先に決定してからペル方程式の解となる (x, d) の組を見つけるような手法を紹介してきた. 例として紹介したのは以下のようなものであり,

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = n+1 \\ d = n(n+2) \end{cases}$$

や

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = \begin{cases} 9(k-1)+8 : n \text{ が奇数} \\ 9k+1 : n \text{ が偶数} \end{cases} \\ d = \begin{cases} 9(k-1)^2+16(k-1)+7 : n \text{ が奇数} \\ 9k^2+2k : n \text{ が偶数} \end{cases} \end{cases}$$

といった具合である. このときあらかじめ決定した自然数 y の値によっては x や d の値は 1 通りではなくいくつかのパターンで表す必要が生じることがわかった. 例えば $y = 1$ の場合は 1 通りで表すことができるが, $y = 3$ の場合は x, d は 2 通りの場合を用いて表す必要がある. これには例えば

- $y = 1$ のときは場合分けが必要ない.
- y が素数のときは場合分けは 2 通りのみである.
- $y \neq 1$ かつ y が素数ではない時は場合分けは少なくとも 2 通り必要であり, 更に場合分けのパターンは 2^n 通りになる $(n \in \mathbb{N})$.

などである. まず次を証明する.

6.2.1 y による解の表現その 1

まず y の値によらずに次のような解が存在する．$y = Y$ とするとき

$$\begin{cases} x = Y^2 \pm 1 + kY^2 \\ y = Y \end{cases}$$

という解が存在する．そのときの d の値を調べるために実際に計算をして確かめることにする．まずペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

を変形すると

$$\begin{aligned} d &= \frac{x^2 - 1}{y^2} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)}{y^2} \end{aligned}$$

と変形する．ここで

$$\begin{cases} x = Y^2 \pm 1 + kY^2 \\ y = Y \end{cases}$$

を代入して d を計算する．計算は以下のようになり

$$\begin{aligned} d &= \frac{(x+1)(x-1)}{y^2} \\ &= \frac{\{(k+1)Y^2 + 1 \pm 1\}\{(k+1)Y^2 - 1 \pm 1\}}{Y^2} \\ &= \frac{\{(k+1)Y^2\}\{(k+1)Y^2 \pm 2\}}{Y^2} \\ &= (k+1)\{(k+1)Y^2 \pm 2\} \end{aligned}$$

となってこのときの d の値が求まる．よって $y = Y$ ならば

$$\begin{cases} x = (k+1)Y^2 \pm 1 \\ y = Y \\ d = (k+1)\{(k+1)Y^2 \pm 2\} \end{cases}$$

となる ($k \geq 0$ の整数)．これを $n = k + 1$ としておけば

$$\begin{cases} x = nY^2 \pm 1 \\ y = Y \\ d = n^2Y^2 \pm 2n \end{cases}$$

例えば $y = 3$ で確認すると上の式はそれぞれ

$$\begin{cases} x = 9n \pm 1 \\ y = 3 \\ d = 9n^2 \pm 2n \end{cases}$$

であり．このときの解の組は下のように表として出力されていた．では $n = 1$ としてみると

$$\begin{cases} x = 9 \pm 1 = \begin{cases} 8 \\ 10 \end{cases} \\ y = 3 \\ d = 9 \pm 2 = \begin{cases} 7 \\ 11 \end{cases} \end{cases}$$

となり確かに解として表現することができる．これに関しての注意点としてはあくまでもこのように表現できる買いが存在するということであり，これだけですべての解を表現できるわけではないことに注意が必要である．

表 5: $y=3$ のときの解の組

y	x	d	n
3	8	7	1
3	10	11	2
3	17	32	3
3	19	40	4
3	26	75	5
3	28	87	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

6.2.2　y による解の表現その 2

前述したものと同じようなことを考える．前回と同様のことを考えるが特に y が偶数である

$$y=2m$$

の場合を考える (m は自然数)．この場合も前述とは別として解の表現方法がありその場合の解は

$$\begin{cases} x=\dfrac{y^2}{2}\pm 1+k\dfrac{y^2}{2} \\ y=2m \end{cases}$$

この場合も同様に d の値を計算してみることにする．まず, ペル方程式

$$x^2-dy^2=1$$

を変形することにしてから計算を行う．ただし簡単化のために A という数は

$$A=\frac{y^2}{2}(k+1)$$

とおいてある．

$$\begin{aligned} d&=\frac{(x+1)(x-1)}{y^2} \\ &=\frac{\left\{\dfrac{y^2}{2}(k+1)+1\pm 1\right\}\left\{\dfrac{y^2}{2}(k+1)-1\pm 1\right\}}{y^2} \\ &=\frac{(A+1\pm 1)(A-1\pm 1)}{y^2} \\ &=\frac{A^2-A\pm A+A-1\pm 1\pm A\mp 1+1}{y^2} \\ &=\frac{A^2\pm 2A}{y^2} \\ &=\frac{A(A\pm 2)}{y^2} \\ &=\frac{\dfrac{y^2}{2}(k+1)\left\{\dfrac{y^2}{2}(k+1)\pm 2\right\}}{y^2} \\ &=\frac{2m^2(k+1)\{2m^2(k+1)\pm 2\}}{4m^2} \\ &=(k+1)\{m^2(k+1)\pm 1\} \end{aligned}$$

となって d の値が求まり y が偶数の場合の解の組は, 0 以上の整数 k と自然数 n を用いることで

$$\begin{cases} x=\dfrac{y^2}{2}(k+1)\pm 1 \\ y=2m \\ d=(k+1)\{m^2(k+1)\pm 1\} \end{cases}$$

という解の組が得られる．これを先ほどと同じっ用に $n = k + 1$ とおいてみると

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2}n \pm 1 \\ y = 2m \\ d = m^2n^2 \pm n \end{cases}$$

y が偶数の場合の式なので $y = 20$ として実際に偶数の場合を記述してみることにする．まず $y = 2$ とするから $m = 10$ とるので残りの x, d をそれぞれ求めれば

$$\begin{cases} x = 200n \pm 1 \\ d = 100n^2 \pm n \end{cases}$$

と求まる．そして $n = 1$ を代入してみるとそれぞれ

$$\begin{cases} x = 200 \pm 1 \\ d = 100 \pm 1 \end{cases}$$

となるので (x, d) の組はそれぞれ

$$(x, d) = (199, 99)$$
$$(x, d) = (201, 101)$$

という組 (x, d) を求めることができて $y = 20$ のときの上の組は確かに解となる．この場合の注意も前章と同様で下のような解の組

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2}n \pm 1 \\ y = 2m \\ d = m^2n^2 \pm n \end{cases}$$

が存在するということであり，これだけですべての解を表現することができるというわけではないということに注意が必要となる．例えば $y = 20(m = 10)$ と $n = 1$ の場合で見ると

$$(x, d) = (199, 99)$$
$$(x, d) = (201, 101)$$

となったが $y = 20$ の場合の解の組の表を見ると となっている．これは $n = 2$ として n を動かしても一部の解の組

表 6: $y = 20$ のときの解の組

y	x	d	n
20	49	6	1
20	151	57	2
20	199	99	3
20	201	101	4
20	249	155	5
20	351	308	6
20	399	398	7
20	401	402	8
20	449	504	9
20	551	759	10
20	599	897	11
20	601	903	12

$$\begin{cases} x = 400 \pm 1 \\ d = 400 \pm 2 \end{cases}$$

という組を得る．これでは (x, d)=(249, 155) の組などを得ることができないので注意が必要である．

6.2.3 一応の証明

2 つの前章では y の値による解の表現を紹介したがそれを簡易的に証明することにする.

- ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

に対して k を 0 以上の整数として x, y が自然数, d を平方数ではない自然数としたときに

$$\begin{cases} x = (k+1)y^2 \pm 1 \\ y = y \\ d = (k+1)\{(k+1)y^2 \pm 2\} \end{cases}$$

が解の組となることを確認する. まずペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

を

$$x^2 - dy^2 - 1 = 0$$

として左辺が 0 となることを確認してみる.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= x^2 - dy^2 - 1 \\ &= \{(k+1)y^2 \pm 1\}^2 - (k+1)\{(k+1)y^2 \pm 2\}y^2 - 1 \\ &= (k+1)^2y^4 \pm 2y^2(k+1) + 1 - \{(k+1)^2y^2 \pm 2(k+1)\}y^2 - 1 \\ &= (k+1)^2y^4 \pm 2y^2(k+1) - (k+1)2y^4 \mp 2(k+1)y^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるのでこれが解の組として表現できることを確認できた.

- ペル方程式

$$x^2 - dy^2 = 1$$

に対して k を 0 以上の整数, m, x, y を自然数, d を平方数ではない自然数としたときに

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2}(k+1) \pm 1 \\ y = 2m \\ d = (k+1)\{m^2(k+1) \pm 1\} \end{cases}$$

が解の組となることを確認する. 同様にペル方程式を

$$x^2 - dy^2 - 1 = 0$$

と変形して左辺が 0 となることを確認する.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= x^2 - dy^2 - 1 \\ &= \left\{\frac{y^2}{2}(k+1) \pm 1\right\}^2 - (k+1)\{m^2(k+1) \pm 1\}4m^2 - 1 \\ &= \frac{y^4}{4}(k+1)^2 \pm (k+1)y^2 + 1 - 4m^4(k+1)^2 \mp 4m^2(k+1) - 1 \\ &= 4m^4(k+1)^2 \pm 4m^2(k+1) + 1 - 4m^2(k+1)^2 \mp 4m^2(k+1) - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので同様にこれが解の組として表現できることを確認できた.

7　最小解の発散性

前章で述べた解の 2 つの表し方

その 1

$$\begin{cases} x = (k+1)y^2 \pm 1 \\ y = y \\ d = (k+1)\{(k+1)y^2 \pm 2\} \end{cases}$$

その 2

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2}(k+1) \pm 1 \\ y = 2m \\ d = (k+1)\{m^2(k+1) \pm 1\} \end{cases}$$

を用いると d による最小解の発散性をある程度紹介することができる．その 1, その 2 においてそれぞれ $n = k+1$ とおいて d を記述すると

$y = Y$ のとき

$$d = n^2Y^2 \pm 2n$$

$y = 2m$ のとき

$$d = n^2m^2 \pm n$$

と求められる．これを用いて最小解の発散性を説明してみることとする．まず n^2Y^2 の値を表にしてみる．と求められる．

n/Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
1	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	$\cdots$
2	4	16	36	64	100	144	196	256	324	400	484	$\cdots$
3	9	36	81	144	225	324						$\cdots$
4	16	64	144	256								$\cdots$
5	25	100	225									$\cdots$
6	36	144	324									$\cdots$
7	49	196	21^2									$\cdots$
8	64	256	24^2									$\cdots$
9	81	324	27^2									$\cdots$
10	100	400	900									$\cdots$
11	121	484	33^2									$\cdots$
$\vdots$												$\cdots$

例えば

$$d = n^2m^2 \pm n$$

で d を求めてみると

n/Y	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
1	1 ± 1	4 ± 1	9 ± 1	16 ± 1	25 ± 1	36 ± 1	$\cdots$
2	4 ± 2	16 ± 2	36 ± 2				$\cdots$
3	9 ± 3	36 ± 3					$\cdots$
4	16 ± 4	64 ± 4					$\cdots$
5	25 ± 5	100 ± 5					$\cdots$
6	36 ± 6						$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

これに対して $\pm$ を $+, -$ として計算してみる.

表 7: $+$ として計算した場合

n/Y	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
1	2	5	10	17	26	37	$\cdots$
2	6	18	38				$\cdots$
3	12	39					$\cdots$
4	20	68					$\cdots$
5	30	105					$\cdots$
6	42						$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

表 8: $-$ として計算した場合

n/Y	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
1	0	3	8	15	24	35	$\cdots$
2	2	14	34				$\cdots$
3	12	33					$\cdots$
4	20	60					$\cdots$
5	20	95					$\cdots$
6	30						$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

また次に $d = n^2Y^2 \pm 2n$ として計算してみる．

表 9: $+$ として計算した場合

n/Y	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
1	3	6	11	18	27	38	$\cdots$
2	8	20	40	68	104	148	$\cdots$
3	15	42	87				$\cdots$
4	24						$\cdots$
5	35						$\cdots$
6							$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

表 10: $-$ として計算した場合

n/Y	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
1	-1	2	7	14	23	34	$\cdots$
2	0	12	32	60	96	140	$\cdots$
3	3	30	75				$\cdots$
4	8						$\cdots$
5	15						$\cdots$
6							$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

と計算ができる．このように d を求めたときに 2 式についての d の式に対してさらに $n = k+1$ とおいた式
その 1

$$\begin{cases} y = y \\ d = n^2y^2 \pm 2n \end{cases}$$

その 2

$$\begin{cases} y = 2m \\ d = n^2m^2 \pm n \end{cases}$$

で表される d の時はその場合の d に対する最小解 X, Y は小さくなる．また

表 11: $d = n^2y^2 \pm n$

n/Y	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
1	1 ± 1	4 ± 1	9 ± 1	16 ± 1	25 ± 1	36 ± 1	$\cdots$
2	4 ± 2	16 ± 2	36 ± 2				$\cdots$
3	9 ± 3	36 ± 3					$\cdots$
4	16 ± 4	64 ± 4					$\cdots$
5	25 ± 5	100 ± 5					$\cdots$
6	36 ± 6						$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

として求められて

$$n^2Y^2 \pm 2(n\ \text{の約数})$$
$$n^2m^2 \pm (n\ \text{の約数})$$

と表される場合には d の値が小さくなる．今まで記述してきた表では $d = 13$ や $d = 29$ 等を求めることができていないが, 付録の表を参照すると最小解がその d の周辺の d の最小解に対して非常に大きい数値を取ることが見て取れる．

8　参考

[1] 高木貞治, 初等整数論講義, 共立出版株式会社, 初版 1931 年
[2] 私の備忘録, http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/pell/pell.htm 2015 年 8 月 29 日に初回アクセス
[3] 高校数学の美しい物語, http://mathtrain.jp/ 2015 年 8 月 30 日に初回アクセス

9　謝辞

本研究を行うにあたりご指導ご協力いただきました, 芝浦工業大学システム理工学部数理科学科兼数理科学研究会部長長瀬准平さんに感謝いたします.

10　後書き

前回の研究では一部の解を数値的に解くだけで終わってしまったが, 今回はそれをよりたくさん行ったりすることで x, y, d の一般的な解の組を求めることができた．またそこから d による最小解の発散性もある程度示すことができた．引き続き数値的に解いたりすることで最小解の発散性がわかればよいと思う.

11　付録

最後にふろくようなものを紹介する.

11.1　プログラム

このプログラムは C 言語で作成したものであるがアルゴリズムは良いものではないのでペル方程式を学ぶ意味で各々プログラムを作成するのも良いかもしれない.

```
#include<stdio.h>
int main(void)
{
printf("ペル方程式 x^2-dy^2=1 の解を出力するプログラムです。y の値を先に決定してから残りの組 (x^^ef^^bd^^a4d) を出力します");
int a,b,d,p=1,q=1;
char name[100];
unsigned long long int x,y,t=1;
printf("最初の y の値を入力→");
scanf("%lld",&t);
while(1)
{
for(d=p;d<=270000;d++)
{
b=1;
for(x=q;x<=85000;x++)
{
for(y=t;y<=t;y++)
{
sprintf(name,"y=%lld.txt",y);
if(x*x-d*y*y==1)
{
if(b==1)
```

```
{
printf("d=%d の時の最小解は (x,y)=(%lld,%lld)\n",d,x,y);
b++;
p=d;
q=x;
FILE *file;
file = fopen(name,"a");
fprintf(file,"d=%d の時の最小解は (x,y)=(%lld,%lld)\n",d,x,y);
fclose(file);
}
}
}
}
}
t++;
p=1;
q=1;
}
return 0;
}
```

11.2　$d=105$ までの最小解のリスト

これについては d が平方数の場合は表記をしていない．また簡単なプログラムで計算を行ったために計算桁数の都合で解が間違っているかもしれないが修正はこの資料の読者に任せせることにする．

d	(x,y)	d	(x,y)	d	(x,y)
1	False	36	False	71	(3480,413)
2	(3,2)	37	(73,12)	72	(17,2)
3	(2,1)	38	(37,6)	73	(2281249,267000)
4	False	39	(25,4)	74	(3649,430)
5	(9,4)	40	(19,3)	75	(26,3)
6	(5,2)	41	(2049,320)	76	(57799,6630)
7	(8,3)	42	(13,2)	77	(351,40)
8	(3,1)	43	(3482,531)	78	(53,6)
9	False	44	(199,30)	79	(80,9)
10	(19,6)	45	(161,24)	80	(9,1)
11	(10,3)	46	(24335,3588)	81	False
12	(7,2)	47	(48,7)	82	(163,18)
13	(649,180)	48	(7,1)	83	(82,9)
14	(15,4)	49	False	84	(55,6)
15	(4,1)	50	(99,14)	85	(285769,90996)
16	False	51	(56,7)	86	(10405,1122)
17	(33,8)	52	(649,70)	87	(28,5)
18	(17,4)	53	(66249,9100)	88	(197,21)
19	(170,39)	54	(486,66)	89	(500001,53000)
20	(9,2)	55	(89,12)	90	(19,2)
21	(55,12)	56	(15,2)	91	(1574,165)
22	(197,42)	57	(151,20)	92	(1151,120)
23	(24,5)	58	(19603,2574)	93	(12151,1260)
24	(5,1)	59	(530,69)	94	(9187426914049,947610731760)
25	False	60	(31,4)	95	(39,4)
26	(51,10)	61	(1766319049,226153980)	96	(49,5)
27	(26,5)	62	(63,8)	97	(62809633,6377352)
28	(127,24)	63	(8,1)	98	(99,10)
29	(9801,1820)	64	False	99	(10,1)
30	(11,2)	65	(129,16)	100	False
31	(1520,273)	66	(65,8)	101	(201,20)
32	(17,3)	67	(48842,5967)	102	(101,10)
33	(23,4)	68	(33,4)	103	(103537981567,10201900464)
34	(35,6)	69	(7775,936)	104	(51,5)
35	(6,1)	70	(251,30)	105	(41,4)