金融工学シミュレーション

芝浦工業大学　数理科学研究会
阿部大紘

平成 28 年 5 月 22 日

1　はじめに

これは, 金融価格商品の推定を確率統計の知識でシミュレーションするものである.

2　乱数の生成

金融工学の分野ではモンテカルロシュミレーションがよく使われる. ある密度関数 f に対して g なる関数があり, $E\left[g(X)\right]$ を計算する. これを解析的に求めるのが困難な場合, f に従う独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を生成し, 大数の強法則を利用して, 近似値

$$E[g(X)] = \lim_{n\to\infty} \frac{g(X_1)+g(X_2)+\cdots+g(X_n)}{n}$$

を求める. ここでの課題は, n をどれくらい増やせば近似値に近づくのか, どのようにして f に従う確率変数を生成できるかということである.

2.1　逆関数法

分布関数が F である確率分布に従う確率変数を求めるには, U を $(0,1)$ 上の一様分布からの確率変数とし, その逆関数値 $f^{-1}(U)$ を求めれば, これが分布関数 F からの確率変数となっている. 一般的な連続型の分布関数は単調増加関数であるので, その逆関数は一意に定まる. 分布関数 F の逆関数が計算可能であるときに有効な手法である.

2.2　棄却法

密度関数が g である分布の確率変数を生成する手段を持っているとする. 一方, 密度関数が f である分布の確率変数を生成したいとする. このとき, $\dfrac{f}{g}$ が有界ならば, 次の手順により g を用いて f に従う確率変数 X を求めることができる.

手順 1：密度関数が g である確率変数 Y を生成する.
手順 2： $(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数 U を生成する.
手順 3：$U \leq \dfrac{f(Y)}{cg(Y)}$ ならば, $X = Y$ とする (X として Y を採用する). そうでないならば手順 1 にもどる.

3　分散減少法

モンテカルロシミュレーションで母集団の平均を求めるとき, 推定量として標本平均 $\hat{\theta}_n$ を前提とする場合が多い. すると, 標本平均 $\hat{\theta}_n$ の標準誤差は $\dfrac{c}{\sqrt{n}}$(c は定数) で与えられることがわかる. より小さな標準誤差を与える統計量を利用できれば, 精度を下げずシナリオ数を減らしたり, また逆にシナリオ数を増加させずに精度を上げることができるので, シミュレーション全体の効率を上げることができる. 以下に紹介する分散減少法は, 上記の標準誤差 $\dfrac{c}{\sqrt{n}}$ の定数部分 c を如何に減少させるかを工夫したものである.

3.1　負の相関法

これまで, 母集団の平均を求めるための推定量として標本平均を前提としていた. 標本平均は不偏推定量であり, その分散は平均 2 乗誤差に等しい. ここでもし標本平均の分散より小さな分散を持つ不偏推定量があれば, シミュレーションの結果がより正確なものになると期待できる. また, より正確な値となる不偏推定量ならば, シナリオ数を減らすことができ, シミュレーションがより効率化する.

負の相関法と呼ばれる方法は, 独立な確率変数を生成するのではなく, 負の相関関係にあるものを生成し, これを利用するものである.

4　今後の課題

分布に従う確率変数の生成にはまだまだたくさんの方法がある. 例えば, 奇遇法, 一様乱数の比率を用いる方法, エリアス法などあるが, 使い勝手のよいものから悪いものまである. それらを研究した上で, さらに精度のよい金融価格シミュレーションの方法を考えたい.

参考文献

[1] モデリング, 日本アクチュアリー会, 2005.

[2] ファイナンスのための確率解析, *S.E.*シュリーヴ, 2006.

[3] 変量解析法入門, 永田靖, 2001.