アルティン予想

芝浦工業大学　数理科学研究会
深田祐平

平成 28 年 5 月 22 日

1　研究動機

小学校時に興味を持った巡回数を調べているうちに, full reptend prime という数字に出会い, その数字の外見を語っているのがアルティン予想である. アルティン予想はまだ証明されていないが, 素数分野では欠かせないリーマン予想が証明されると, アルティン予想が成り立つ. アルティン予想とリーマン予想の繋がりについて興味を持ち, 研究テーマを設定した

2　巡回数

巡回数とは 2 倍, 3 倍, $\cdots$ したときに , その各桁の数の順序を崩さずに巡回させた数になる整数である[1]. 巡回数は 142857 だけではなく 588235294117647 や 5263157894736842, など桁数は大きいが何種類もある.

計算例

$142857 \times 2 = 285714,\ 142857 \times 3 = 428571,$
$142857 \times 4 = 571428,\ 142857 \times 5 = 714285,$
$142857 \times 6 = 857142$

ここで, 巡回数を生成するために必要な数 full reptend prime について 巡回数の各桁の数はすべて $1 \div m$ の計算の小数部分で構成されていることがわかった.つまり巡回数はすべて $\frac{10^n}{m}$ の形で表せるため, この n, m(full reptend prime) について追求する.
$1 \div 7, 1 \div 17$ などについて考えてみることにした.これらの式を剰余の式で表すと一般式は,

1. $10^{p_1} = m \times a_1 + b_1$
2. $b_1 \times 10^{p_2} = m \times a_2 + b_2$
3. $b_2 \times 10^{p_3} = m \times a_3 + b_3$

$$\vdots$$

n $b_{n-1} \times 10^{p_{n-1}} = m \times a_{n-1} + b_n$

$$142857 \quad \rightarrow \quad \frac{10^6}{7}$$
$$588235294117647 \quad \rightarrow \quad \frac{10^{16}}{17}$$
$$5263157894736842 \quad \rightarrow \quad \frac{10^{18}}{19}$$

ここで見られる $7, 17, 19, \cdots$ という数こそが full reptend prime だが, この数については不明な点が多々ある. その一つが, full reptend prime は無限に存在するのか. という疑問だ. その問に答えてくれるのがアルティン予想である.

[1] 隣の桁の数どうしを足し合わせることもある.

3　アルティン予想

アルティン予想とは, 整数 a に対して, a が -1 や平方数でなければ $a \mod p$ が原始根となるような素数 P が無限に存在する. という予想である.

$$\pi a(x) \sim \frac{Cx}{\log x}$$

ここで $\pi a(x)$ とは 1 から x の間にある素数の中で a を原始根にもつ素数の個数関数である. また p を素数とし, C は

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(x)}{n\varphi(x)} = \prod \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right) = 0.37395\cdots$$

である. (μ :メビウス関数, φ : オイラー 関数).
この式は, 素数全体の個数と full repten prime の個数の比が, $1 : 0.3795\cdots$ になるという意味である. このことから, full reptend prime が無限に存在することにも繋がる.

4　リーマン予想

ゼータ関数 $\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + \cdots$ を解析接続すると,

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

を得る. この関数から, 解析接続や式変形を繰り返し行うと,

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

を得る. このとき, 自明な解は $\zeta(s)$ に含まれる $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ から $s = -2n$ が $\zeta(s)$ の自明な零点を表すことがわかる. またリーマン予想は $\zeta(s) = 0$ となる自明でない点のすべての実部が 0 である, という予想である.

5　リーマン予想とアルティン予想の繋がり

リーマン予想が証明されることにより, 素数の分布がより洗練される. また, アルティン予想は素数の分布に対する full reptend prime の比を表している. このことから, リーマン予想とアルティン予想の繋がりが分かる. 実際にリーマン予想が証明されればアルティン予想が成り立つことが分かる.

6　感想

リーマン予想の概要に少し触れ, アルティン予想の理解が深まった. 次はアルティン予想の証明をしていきたい.

7　参考文献

[1] 新井朝雄, 複素解析とその応用, 共立出版, 2006 年
[2]https://en.wikipedia.org/wiki/Full_reptend_prime#cite_note-Dickson-1