ベルトラン-チェブィショフの定理

芝浦工業大学　数理科学研究会
石川直幹

2016 年 5 月 22 日

1　研究背景

以前から素数について関心があった. そんなある日, ”素数の分布” という本を学校の図書館で見つけたので読んでみた. するとその中に,
「任意の自然数に対して, $n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在する. 」
つまり, 素数全体の集合を $\mathbb{P}$ とすると,

$$^{\forall}n \geq 1(n \in \mathbb{N}),\ ^{\exists}p \in \mathbb{P} \text{ s.t. } n < p \leq 2n.$$

というベルトラン-チェブィショフの定理なるのものを見つけ, 興味を持ったので調べてみた.

2　研究結果

「任意の実数 $\frac{7}{2} \leq t$ に対して, $t < p \leq 2t-2$ を満たす素数 p が存在する. 」
つまり,

$$^{\forall}t \geq \frac{7}{2}\ (t \in \mathbb{R}),\ ^{\exists}p \in \mathbb{P} \text{ s.t. } t < p \leq 2t-2.$$

ということが言えれば, 定理は証明されることがわかり, この証明についても,

$$\begin{aligned}
\Lambda(n) &= \begin{cases} \log p\ (n = p^a,\ a > 0) \\ 0\ (n \neq p^a,\ a > 0) \\ 0\ (n = 1)\ , \end{cases} \\
\vartheta(x) &= \sum_{p \leq x} \log p\ (x \geq 1)\ , \\
\psi(x) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\ (x \geq 1)
\end{aligned}$$

という新しく関数を導入することで,

$$\sum_{\frac{x}{2} < p \leq x-2} \log p > W(x)$$

となる微分可能な連続関数 $W(x)$ を見つけることに成功した. さらに, $W(800) > 0$ となることがわかったので, $t \leq 400$ を手計算で調べた結果, 素数が存在することがわかった.

3　結論

$(n, 2n]$ $(n \in \mathbb{N})$ から, $(x, 2x-2]$ $\left(\frac{7}{2} \leq x,\ x \in \mathbb{R}\right)$ まで範囲を絞ることができた.

4　今後の課題

結局, 定理に一つの証明を与えて終わってしまった. 次は, ほかの証明や, 参考文献にある素数定理, ディリクレの定理なども合わせて調べたい.

さらに, それらを通して, あるときは, 連続でない関数を微分可能な関数で評価し, 連続でない関数を微分可能な関数で置き換えて考え, またあるときは, 連続なものを, 連続でないものに置き換えて考える手法を自分のものにして, 研究に役立てたい.

5　参考文献

[1] 内山 三郎:素数の分布, 第 1 刷 1970 年 6 月 25 日, 宝文館出版

[2] 高木貞治:初等整数論講義, 1971 年 10 月 15 日, 共立出版

[3] 栃折成紀:「n と $2n$ の間に素数がある」の証明を考える-ベルトラン・チェビショフの定理のより強い評価による証明-,
`https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/76/76-8.pdf`,
2016 年 5 月 16 日最終アクセス

[4] MATHEMATICS.PDF:Bertrand-Chebyshev の定理の *Erdös* による初等的な証明,
`http://mathematics-pdf.com/pdf/chebyshev.pdf`,
2016 年 5 月 16 日最終アクセス

[5] 青空学園数学科:素数定理,
`aozoragakuen.sakura.ne.jp/PDF/sosuuteiri.pdf`,
2016 年 5 月 16 日最終アクセス

[6] 吉田武:オイラーの贈物-人類の至宝 $e^{i\pi} = -1$ を学ぶ-, 第 1 刷 18 刷発行 2013 年 10 月 5 日, 東海大学出版会