Taylor 展開

芝浦工業大学　数理科学研究会
小池智人

平成 28 年 5 月 22 日

1　研究背景

私たちの知る関数の中には解くことのできない方程式が無数に存在する. しかし, その方程式の解に対して近似法を用いれば正しい解に近いものが与えられることになる. その近似法の代表例として級数展開が挙げられる. 更に, 級数展開の中でも特別な場合となるものが Taylor 展開が有名である. しかし, その Taylor 展開において不思議に思う人も少なくないだろう. 今回はその Taylor 展開についてそれがどうやって導出されていくのか, その過程を考えていきたい.

2　級数展開

まず, 関数は次で与えることができる.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

この形を**べき級数**といい, この特殊系が Taylor **級数**となる.
今回はこの式を既知として導出することにする. Taylor 級数の導出やそれに伴う定理の証明していくには, 以下のような定理が必要になる.

1. 中間値の定理
2. 平均値の定理
3. Cauchy の平均値の定理
4. 部分積分の公式

2.1　1 変数関数

$f(x)$ は $[a,\ b]$ で定義されていて, C^n 級で連続とする.

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\,dt$$

この式から, 部分積分の公式を出てくる積分に対して繰り返し, 式を変形させていくと,

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} + R_k(x) \\ R_n(x) = \displaystyle\int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \end{cases}$$

が与えられ, $f(x)$ は c を中心とする Taylor **展開**といい, $R_n(x)$ を**剰余項**という.

$R_n(x)$ に対して, 平均値の定理より,

$$R_n(x) = f^{(n+1)}\big(\alpha + \theta(x-\alpha)\big)\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (0 < {}^{\exists}\theta < 1)$$

が得られる. $n \to \infty$ のとき, $R_n(x) \to 0$ となれば, $f(x)$ は Taylor 展開可能といい,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

で表す. $\alpha = 0$ のとき, 即ち,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

をみたすとき, このことを Maclaurin **展開**と呼ぶ.

2.2　多変数関数

連続である 2 変数関数の Taylor 展開には $p = p_1 + p_2$ となる p_1, p_2 回偏導関数をとることで導出でき, それは以下のようになる.

$$\begin{cases} f(x+h,\ y+k) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{\partial^p}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}} f(x,\ y) \cdot \frac{h^{p_1}k^{p_2}}{p_1!\,p_2!} + R_n \\ R_n = (n+1)\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1} \frac{h^{p_1}k^{p_2}}{p_1!\,p_2!}\int_0^1 (1-t)^n \frac{\partial^p f(x+ht,\ y+kt)}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}\,dt \end{cases}$$

多変数の連続性から, d 変数関数においても $p = p_1 + \cdots + p_d$ となる $p_1,\ \ldots,\ p_d$ 回偏導関数をとることで 1 変数のときと同様な操作で導出することが可能である. f が d 変数関数のとき, $(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_d)$ のまわりでの Taylor 展開を行うと,

$$\begin{aligned} &f(x_1,\ \ldots,\ x_d) \\ &= \sum_{p_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{p_d=0}^{\infty} \frac{(x_1-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x_d-\alpha_d)^{p_d}}{p_1!\cdots p_d!}\left\{\frac{\partial^p f(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_d)}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_d^{p_d}}\right\} \end{aligned}$$

が得られることがわかる.

3　今後の課題

研究に時間をあまり割くことができず, 本来目標にしていたところまでまとめることができなかったので, 多変数関数の Taylor 展開についてももっと厳密な考察していき, また個人的に学習を進めていくようにしていきたいと思う.

4　参考文献

[1] 田島一郎, 解析入門, 岩波全書, 2015 年.
[2] 溝畑茂, 数学解析, 朝倉書店, 2007 年.