正規化ブラケット多項式

芝浦工業大学　数理科学研究会
西木航

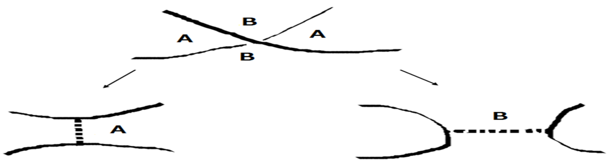
平成 28 年 5 月 22 日

1　研究背景

一時期, 結び目理論のゼミを行っていたが, 予備知識が乏しく, 定理を利用し図で同相か確かめる程度で終わってしまったため, 結び目を図ではなく, 数式等を使ってパターン化出来ないかと考え, 研究に取り組むことを決めた. 今回はその中で初等的な (正規化) ブラケット多項式について考えた.

2　絡み目を分離する

まず, パターン化の一つとして交差点に注目した. その方法として局所的に分離するやり方が 2 パターンに分けられるため, 下図のように局所的に切り取った領域に $A,\ B$ とラベル付けを行う (下交差線に沿ってその交差点に向かって左側に現れる領域を A とし, 他方を B とする).



この方法は再構成も出来るため, 不変量であることが予想でき, 実際不変である. 従って, これらの A と B の痕跡を残しておけば, その子孫のどれからでも祖先の絡み目を再構成することができる. もっとも幼い子孫は平面上の Jordan 曲線の集まりである.

3　ブラケット多項式

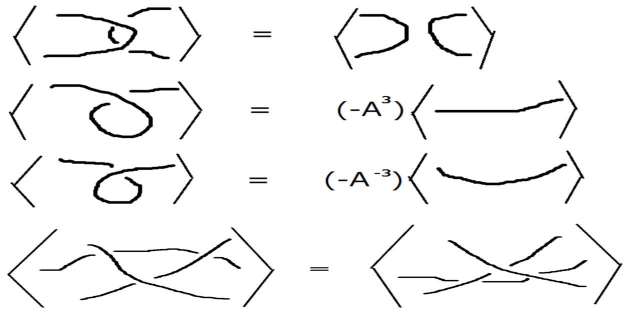
分離した式を以下のように公式化する. 絡み目 K において, σ を K のステイトとし, $\langle K|\sigma\rangle$ をラベル付けされた $(A,\ B)$ の積で表し, $\|\sigma\| :=$ (ループの個数) -1 とおくと, ブラケット多項式を次のように定義できる:

$$\langle K\rangle = \langle K\rangle(A,\ B,\ d) = \sum_{\sigma} \langle K|\sigma\rangle d^{\|\sigma\|}$$

ただし, $A,\ B,\ d$ は可換な変数であり, $\sum$ は K のステイト全体わたって動くものとする.

3.1　ライデマイスター移動の導入

上で定義したブラケット多項式は, このままだとトポロジー的な不変量ではない. なぜならば, ライデマイスター移動は全同位であるが, ブラケット多項式において値が異なるからだ. よって, ライデマイスター移動において不変量になるように考える. まず, ライデマイスター移動 1, 2, 3 をブラケット多項式で解き, これらの式において $B = A^{-1},\ d = -A^2 - A^{-2}$ を導入すると, 以下の式が得られる.



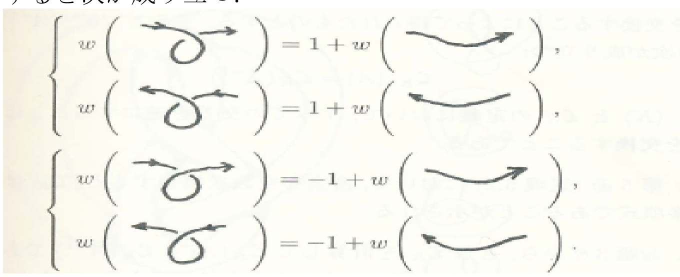
3.2　ブラケット多項式の再検討

ライデマイスター移動 2, 3 はブラケット多項式に関して不変となったが, ライデマイスター移動 1 についても不変となるように捻り数を導入し, 正規化ブラケット多項式を定義する準備を行う. K を有向絡み目の図形表示とする. K の捻り数 $\omega(K)$ を次の等式によって定義する:

$$\omega(K) = \sum_{p} \varepsilon(p)$$

ここで, p は K の全ての交差点に渡って動き, $\varepsilon(p)$ は次の規則で交差点を定める:

すると次が成り立つ.



従って全同位で不変な等式をつくることが可能になった.

3.3　正規化ブラケット多項式

前節までのことから, 有向絡み目 K に対し, 全同位の不変量である $\mathcal{L}_K$ を次の公式を定義する:

$$\mathcal{L}_k = (-A^3)^{-\omega(K)}\langle K\rangle$$

この式を**正規化ブラケット多項式**と呼ぶ.

4　参考文献

[1] L. H. カウフマン (訳) 鈴木晋一, 河内明夫 1995 年, 培風館