

ルービックキューブと群

芝浦工業大学 数理科学研究会
長田祐輝

平成 28 年 5 月 22 日

1 研究動機

中学生の頃ルービックキューブにはまっていた。そのときは解法を覚えるだけであったが、大学生になり代数学を学び、置換というものを学んだ。そしてある本にルービックキューブを置換群を用いて解くことができるということが書いてあったので興味が湧き今回の研究に至った。今まで覚えるだけだったルービックキューブの回転の手順をどうやって導出したのかに興味を持った。置換を用いてパズルを解きたい。

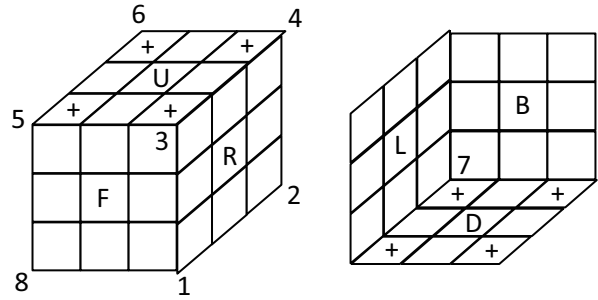


図 1: 3 面体の '+' 印及び頂点の番号付け

2 さまざまな用語および重要な定理

定義 2.1 ルービックキューブの面に次のように名前を付けておく：

上面 $\dots U$, 下面 $\dots D$, 左面 $\dots L$, 右面 $\dots R$, 前面 $\dots F$, 後面 $\dots B$.

また、次のように U, D, L, R, F, B は面を回転させる記号としても用いられる：

$U \dots$ 上面を時計回りに 90 度回転, $D \dots$ 下面を時計回りに 90 度回転, $L \dots$ 左面を時計回りに 90 度回転, $R \dots$ 右面を時計回りに 90 度回転, $F \dots$ 前面を時計回りに 90 度回転, $B \dots$ 後面を時計回りに 90 度回転.

これら U, D, L, R, F, B の面の回転操作のことを単位操作という。

定義 2.2 ルービックキューブのシールが 3 枚貼られている小立方体を 3 面体という。シールが 2 枚貼られている小立方体を 2 面体という。シールが 1 枚貼られている小立方体を 1 面体という。

定義 2.3 ルービックキューブの 3 面体に次の図 1 のように番号と '+' 印 (基準参照印) を振っていく。

定義 2.4 ルービックキューブの 2 面体に次の図 2 のように番号と '+' 印 (基準参照印) を振っていく。

定理 2.5 (キューブ理論の第 1 基本定理) 次の決定過程によって、ルービックキューブの位置は決定される。

- どのように 2 面体が置換されたか。
- どのように 3 面体が置換されたか。
- (基準参照印に対して) どの 2 面体の印が反転したか。
- (基準参照印に対して) どの 3 面体の印がどれだけ (時計回りに 120 度または 240 度) 回転したか。

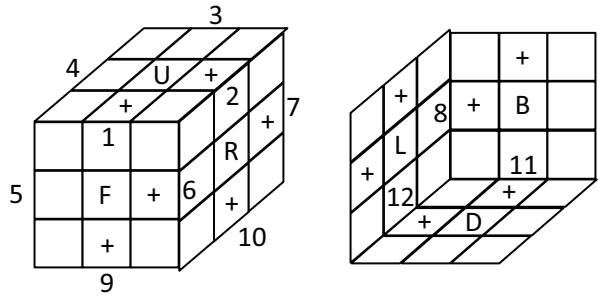


図 2: 2 面体の '+' 印及び頂点の番号付け

定理 2.6 (キューブ理論の第 2 基本定理) $(v, r, w, s) \in C_3^8 \times S_8 \times C_2^{12} \times S_{12}$ が規則に従った手順で得られた変化であるための必要十分条件は

- $\text{sgn}(r) = \text{sgn}(s)$
- $v_1 + \dots + v_8 \equiv 0 \pmod{3}$
- $w_1 + \dots + w_{12} \equiv 0 \pmod{2}$

3 今後の課題

今回、私は数学的な手法を用いて完成までの手順を求めるのではなく、コンピュータの力を借りてプログラミングによって完成までの手順を得た。しかし当初の目的では、コンピュータを用いずに数学的な手法で完成までの手順を得るつもりだった。今度はコンピュータでのアプローチではなく、数学的なアプローチで群論を用いて議論してみたい。

4 参考文献

- [1] David Joyner (川辺治之), 群論の味わい 置換群で解き明かすルービックキューブと 15 パズル, 共立出版, 2010.