あみだくじの数学

芝浦工業大学　数理科学研究会
佐藤　晶子

平成 28 年 5 月 22 日

1　研究背景

ガロア理論の本を読んでいると, 群論にぶつかった. 群論の本を読んでみると, 群の一つの具体例としてあみだくじが挙げられていた. 私たちの身近にあるあみだくじが数学的にどのようなものであるかに興味を持ち, 調べてみようと思った.

2　あみだくじの定義

あみだくじとは, 下記の条件を満たすもののことである：

- 上段から始まり, 常に下に向かって道を辿り, 下段に向かう.
- 真横に引いた横線によって隣り合う縦線が繋がったときには, それぞれ繋がった縦線に移る. 但し, 一本の横線で繋げられる縦線は必ず二本とする.

横線が 0 本あみだくじを, **あみだくじの原型**と呼ぶ.
横線 m の数が最小のあみだくじを**最適あみだくじ**と呼ぶ.

3　あみだくじの性質

あみだくじには以下の性質がある：

- **縦棒の数 n のあみだくじの総数は $n!$ 通り**
  これは, 同じ結果になるあみだくじを同じものと見なすためである. このとき縦線 n のあみだくじの結果は, n 個の数の順列となるから, $n!$ 通りとなる.
- **$n!$ 通りのあみだくじはすべて作成可能**
  n 個の数を任意の場所に下ろせることを示せば, $n!$ 通りのあみだくじが作れることが証明される.
- **違う場所からスタートして, 同じ所に行き着くことはない. 逆に, 同じ所からスタートして違う場所にたどり着くこともない.**
  これは, あみだくじが全単射であることと同値である. 帰納法で, 一つの横線が局地的な互換を起こしているだけであることに注目して証明される.
- **横線が奇数本のあみだくじを, 偶数本の横線で作成することは出来ない.**
  単位元が偶置換であること, 逆元の偶奇が一致することを用いて証明する.

4　あみだくじから群論へ

あみだくじの性質から, あみだくじは群であることが導かれる.
空集合でない集合 G に演算*が定義されているとき, 次の条件 (1)〜(4) を満たすならば G は*に関して群であるという. さらに (5) も合わせて満たすならば, G は*に関して可換群またはアーベル群という.

(1) 演算*に関して閉じている

(2) 任意の元に対して, 結合法則が成り立つ. $(a{*}b){*}c = a{*}(b{*}c)$

(3) 単位元が存在する. $a * e = e * a = a$

(4) 任意の元に対して, その元に対する逆元が存在する. $a * b = b * a = e$

(5) 任意の元に対して, 交換法則が成り立つ. $a * b = b * a$

あみだくじにおいて, あみだくじの合成を演算*と定義する.
あみだくじは全単射であるから, あみだくじの合成という演算で閉じている (1, 2). 単位元とはあみだくじの原型のことである (3). 任意のあみだくじと合成することであみだくじの原型となるあみだくじは, 任意のあみだくじをひっくり返したものであるから存在する (4). あみだくじの合成において順序を入れ替えると, 同じあみだくじを生成するとは限らない (5).
あみだくじは群であるが, 可換群ではないことがあみだくじの性質によって証明される.

5　今後の課題

あみだくじから群論の世界に踏み込んだが, 群論は奥が深くまだ理解できていないことも多い. これからも勉強を続け, 群論と, その先のガロア理論を理解することに努めていきたい.

6　参考文献

[1] 梶原健:本質を学ぶガロワ理論最短コース, 2013, 日本評論社
[2] 斎藤毅:線形代数の世界　抽象数学の入り口, 2007, 東京大学出版会
[3] 芳澤光雄:群論入門　対称性をはかる数学, 2015, 講談社
[4] 福田拓生:集合への入門 [無限をかいま見る], 2012, 培風館
[5] 結城浩:数学ガール　ガロア理論, 2012, ソフトバンククリエイティブ株式会社
[6] 「対称群 [物理のかぎしっぽ]」, hooktail.sub.jp/algebra/Symmetric Group/, (2016, 4, 28)