ペル方程式

芝浦工業大学　数理科学研究会
澤崎航輔

2016 年 5 月 22 日

.

1　研究背景と研究動機

この研究は 2015 年度芝浦祭の研究発表の続きの位置づけになっている．最初にペル方程式について研究を行った理由は大学受験問題のペル方程式をテーマにした問題が解けず, そこから興味を持った．前回は, 新しいと思われる事柄が見られたが, 中途半端に終わってしまったので今回も引き続き研究するに至った．

ペル方程式は三角数などといったものと関連していたり, アルキメデスの牛の問題というものがあるのだが, その問題は最終的にペル方程式を解くことに帰着する．ペル方程式は他の問題に応用されている．

2　ペル方程式とは

ペル方程式とは d を平方数ではない自然数として

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{1}$$

の解 (x, y) の解の組を求める問題である．本研究においては x, y は自然数として自然数の解の組を求めることにしている．

$$x^2 - dy^2 = 1$$

の解 (x, y) に対して

$$x + \sqrt{d}y$$

を最小値にするような (x, y) の組をそれぞれ (x, y)=(X, Y) とおき, これをペル方程式の最小解と呼ぶことにする．

3　ペル方程式の解

今回はプログラムを用いてペル方程式の解を求めた．ペル方程式を解くときに d の値を決定してから x, y の値をもとめると x, y が速い速度で大きくなる．このことから y の値を決定してから x, d の値を決定することで比較的求まりやすくなった．以下に事例を紹介する．

3.1　具体的な解の組の例

紹介のために $y = 1$ の場合を用いることにする．左の表はプログラムでの出力一例で実際に解を自然数 n を用いて表現すると

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = n + 1 \\ d = n(n + 2) \end{cases}$$

表 1: $y = 1$ のときの解の組

y	x	d	項数 n
1	2	3	1
1	3	8	2
1	4	15	3
1	5	24	4
⋮	⋮	⋮	⋮

3.2　解の表現例

前述のように y を固定してから x, d を決める行為を繰り返すと以下のような解を持つことがわかった．n, m を正の整数として表現する．

$y = Y$ のとき

$$\begin{cases} x = nY^2 \pm 1 \\ y = Y \\ d = n^2Y^2 \pm 2n \end{cases}$$

$y = 2m$ のとき (偶数)

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2}n \pm 1 \\ y = 2m \\ d = m^2n^2 \pm n \end{cases}$$

3.3　最小解の発散性

$$\begin{cases} d = n^2Y^2 \pm 2n \\ d = n^2m^2 \pm n \end{cases}$$

で d が表すことができる場合は最小解 X, Y は小さい値になり, そうではない場合は最小解 X, Y は周辺の d と比べて大きな値になる．例として $d = 12, 13, 14$ の場合を記述すると

d	X	Y
12	7	2
13	649	180
14	15	4

となっているが, $d = 13$ は上記 2 式では表せない．この場合には X, Y の値が大きくなる傾向にある．

4　参考文献

[1] 高木貞治, 初等整数論講義, 共立出版株式会社, 初版 1931 年
[2] 私の備忘録, `http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/pell/pell.htm` 2015 年 8 月 29 日に初回アクセス
[3] 高校数学の美しい物語, `http://mathtrain.jp/` 2015 年 8 月 30 日に初回アクセス