宇宙空間での
軌道修正とランデブー

BV16005 池田隼人
BQ16043 鱸優吾

平成 28 年 11 月 4 日

目 次

1 研究動機 **2**

2 軌道修正とランデブー **2**

3 ヒル方程式 **2**

3.1 ヒル方程式とは… 2
3.2 ヒル方程式の導入 1 3
3.3 ヒル方程式の導入 2 5
3.4 ヒル方程式の解 8

1　研究動機

現象数理について勉強したいと思い始めたら, まず基礎に微分方程式に関わりがあることがわかり, そこから取りかかることに決めた. しかし微分方程式に取り組んでいる最中, 偶然, 微分方程式と宇宙の両方に関連したヒル微分方程式というものをみつけた. 元々, 宇宙にも興味があったため, ヒル方程式に興味を持ち, ヒル方程式を解明していこうと決めた.

2　軌道修正とランデブー

宇宙空間で衛星と輸送船がランデブー[1] するための軌道修正速度を求めるには以下のヒル方程式というものものを用いる. 実際に技術試験衛星 EST-VII おりひめひこぼしで無人自立ランデブドッキングを世界で始めて成功させた際に使用された.

3　ヒル方程式

3.1　ヒル方程式とは…

以下がヒル方程式である.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - 3n^2x = \hat{a}_x, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} = \hat{a}_y, \tag{2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + n^2z = \hat{a}_z. \tag{3}$$

(但し, $n = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}$,　n : 平均運動 μ : 重力定数, r : 距離, a : 単位質量あたりの外力)

この方程式は線形の運動方程式である. 次のような特徴がある.

[1] ランデブーとは宇宙空間において宇宙船, 宇宙ステーションなどが互いに接近していく操作のことである.

(i) z は x, y と独立で軌道周期で高度方向に上下する.

(ii) $\dot{x} > 0$ の加速で進行方向に減速してるように見える.

(iii) $\dot{y} > 0$ の加速度で上方向に加速しているように見える.

3.2 ヒル方程式の導入1

地球の中心, 円軌道上を動く衛星の相対運動を基準として考えていく. 平均運動 n で一軸を円軌道に周回するステーション方向に固定して, 慣性系に対して回転する動座標系を考える.

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}$$

ここで, 平均速度は以下のように求めた.

運動方程式 $ma = F$ より, $a = r\omega^2$, $F = \dfrac{GMm}{r^2}$ とすると,

$$mr\omega^2 = \frac{GMm}{r^2}$$

これを整理すると,

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

となる. ここで GM は定数なので $GM = \mu$ とおき, $\omega^2 = n^2$ とすると,

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}$$

$$\mu = G \times M_E \quad (\mu\text{:重力定数}, G\text{:万有引力定数}, M_E\text{:地球の質量})$$

円軌道まわりの方程式を $\boldsymbol{r}$ ベクトルまわりに展開してみる. 次に重力加速度 g を求める. 万有引力の公式より,

$$F = \frac{GMm}{r^2} \ (G : \text{万有引力定数})$$

ここで, $F = mg$ とすると,

$$mg = \frac{GMm}{r^2}$$

となる．両辺を m で割ると,

$$g = \frac{GM}{r^2}.$$

さらに GM は定数なので $GM = \mu$ とおくと,

$$g = \frac{\mu}{r^2}$$

となる．その後, 向きを考えるため, 単位ベクトル $\frac{|\boldsymbol{r}|}{r}$ を右辺でつくると, 以下のようになる．

$$g = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

重力加速度 $g = -\left(\frac{\mu}{r^3}\right)\boldsymbol{r}$ は

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{r}} = (-\mu)\frac{1}{r^6}\left(\boldsymbol{1}\cdot r^3 - \boldsymbol{r}\cdot 3\cdot r^2\frac{\boldsymbol{r}^T}{r}\right) = -\frac{\mu}{r^6}\big(r^3\boldsymbol{1} - 3r(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}^T)\big)$$

と展開でき

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{r}_0 + \delta\boldsymbol{r}) &\cong \boldsymbol{g(r)} + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{r}}\delta\boldsymbol{r} \\ &= -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \left(-\frac{\mu}{r^3}\right)\left(\boldsymbol{1} - 3\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)^T\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

となる．これを回転座標固定系でかくと

$$\hat{g}(\boldsymbol{r}_0 + \delta\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu}{{r_0}^2}\boldsymbol{i}_x + \left(-\frac{\mu}{{r_0}^3}\right)(\boldsymbol{1} - 3\boldsymbol{i}_x\cdot\boldsymbol{i}_x^T)\delta\hat{\boldsymbol{r}}$$

ここに $\hat{g}$ は回転座標系表現したもので, $\boldsymbol{i}_x$ は図の x 方向単位ベクトルである．慣性系での運動方程式は $\delta\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f}$ 加速度) であり，ここで, 回転座標系から慣性系への座標変換をして, 時間微分すると

$$\begin{aligned} \delta\dot{r} &= \dot{r}(\Theta\delta\hat{\boldsymbol{r}}) \\ &= \Theta\left(\delta\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} + \Theta^{-1}\dot{\Theta}\delta\hat{\boldsymbol{r}}\right) \\ &= \Theta\left(\delta\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} + \boldsymbol{\omega}\times\delta\hat{\boldsymbol{r}}\right) \end{aligned}$$

ここに, Θ は回転系から慣性系への座標変換である. $\Theta^{-1} = \Theta^T$ であるから, $\Theta^T \dot{\Theta} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}$ という関係がある. ω は座標系の回転角速度ベクトルで, それを回転座標系で表現したものである.

ここからもう一度時間微分をすると回転座標系の運動方程式:

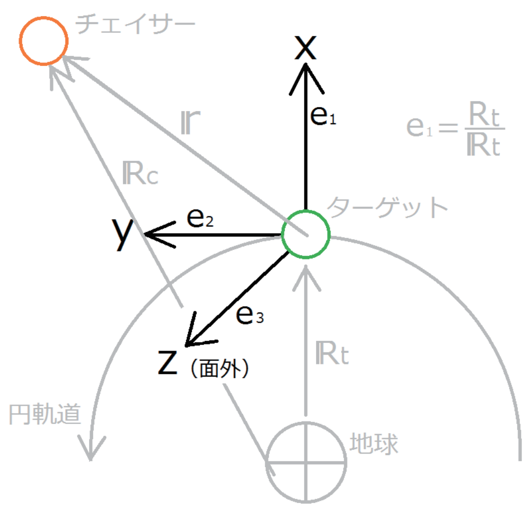
$$\delta\ddot{\hat{\boldsymbol{r}}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \delta\hat{\boldsymbol{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \delta\ddot{\hat{\boldsymbol{r}}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \delta\hat{\boldsymbol{r}})$$

ここから (x, y, z) 座標を用いて考えると, 最終的には

$$\begin{aligned}
\ddot{\hat{\boldsymbol{r}}} - 2n\dot{y} - 3n^2 x &= \hat{a}_x, \\
\ddot{\hat{\boldsymbol{r}}} + 2n\dot{x} &= \hat{a}_y, \\
\ddot{\hat{\boldsymbol{r}}} + n^2 z &= \hat{a}_z
\end{aligned}$$

が得られる.

3.3 ヒル方程式の導入 2



地球の中心, 円軌道上を動く衛星, ターゲット (輸送船等) を基準として考えていく. こちらは, ターゲットと国際宇宙ステーションの位置ベクトルから運動方程式を考え, 導出していく方法である.

$$\text{衛星}\ :\ \frac{d^2\boldsymbol{R}_t}{dt^2} = -\mu\frac{\boldsymbol{R}_t}{R_t^3} + \boldsymbol{f}_t$$

$$\text{ターゲット}\ :\ \frac{d^2\boldsymbol{R}_c}{dt^2} = -\mu\frac{\boldsymbol{R}_c}{R_c^3} + \boldsymbol{f}_c$$

となり, ここで距離 $R_t = \sqrt{\boldsymbol{R}_t^2} = \sqrt{\boldsymbol{R}_t\cdot\boldsymbol{R}_t}$, $R_c = \sqrt{\boldsymbol{R}_c^2} = \sqrt{\boldsymbol{R}_c\cdot\boldsymbol{R}_c}$ を用いた. 相対位置関係が $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_c - \boldsymbol{R}_t$ なので,

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}_t}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{R}_c}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\boldsymbol{R}_t}{R_t^3} + \mu\frac{\boldsymbol{R}_c}{R_c^3} + \boldsymbol{f} \tag{1}$$

$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_c - \boldsymbol{f}_t$ とおいた. これより, $r \ll R_t$ に注意して r/R_t の 2 次項以上を考慮しないで考えていく. $\boldsymbol{R}_c/R_c^3$ を次のように近似する.

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{R}_c}{R_c^3} =& \frac{\boldsymbol{R}_t+\boldsymbol{r}}{(\boldsymbol{R}_t+\boldsymbol{r})^{2\cdot\frac{3}{2}}}\\ =& \frac{\boldsymbol{R}_t+\boldsymbol{r}}{(\boldsymbol{R}_t\cdot\boldsymbol{R}_t + 2\boldsymbol{R}_t\cdot\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})^{\frac{3}{2}}}\\ =& \frac{\boldsymbol{R}_t+\boldsymbol{r}}{R_t^3}\left[1 + \frac{2\boldsymbol{R}_t\cdot\boldsymbol{r}}{R_t^2} + (\frac{r}{R_t})^2\right]^{-\frac{3}{2}}\\ \approx& \frac{\boldsymbol{R}_t+\boldsymbol{r}}{R_t^3}\left(1 - 3\frac{\boldsymbol{R}_t}{R_t}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{R_t}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

ここでは, 下記の近似式を使用して $\dfrac{r}{R_t}$ の 2 次項を無視した.

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \cdots, (|x| < 1, p;\text{有理数})$$

(1), (2) 式より,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &\approx -\frac{\mu}{\boldsymbol{R}_t^3}\left(-3\frac{\boldsymbol{R}_t}{R_t}\cdot\frac{\boldsymbol{R}_t}{R_t}\cdot\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\right) + \boldsymbol{f}\\ &= \frac{\mu}{\boldsymbol{R}_t^3}(3\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{f}\end{aligned}$$

このとき, $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{R}_t}{R_t}$ を用いた.

次のように相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を座標表示する.

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = \{\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \{e\}^T \cdot r$$

ここで,

$$\boldsymbol{e} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{Bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{R}_t}{R_t}$ (動径半径), $\boldsymbol{e}_3$: 軌道面外方向, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1$面内進行方向.

このとき次のように定義できる.

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \approx \frac{\mu}{R_t^3}(3x\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{f}$$

ここで, $\{\boldsymbol{e}\}$ 系は軌道上を動くことから回転座標系であり, その角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とする. このとき, 次のような (慣性) 基準系と回転系の時間微分関係式が成立する.

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\{\boldsymbol{e}^T\} \cdot r\right] \\ &= \{\boldsymbol{e}^T\}\frac{dr}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \{\boldsymbol{e}^T\} \cdot r \\ &\equiv \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}} + \dot{\omega} \times \boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}).$$

ここでは,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \{\boldsymbol{e}^T\}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ \ddot{\boldsymbol{r}} = \{\boldsymbol{e}^T\}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}.$$

$$\dot{r} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad \ddot{r} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

基準軌道を円軌道の場合に限定すると,

$$\boldsymbol{\omega} = n\boldsymbol{e}_3,\ \dot{\omega} = 0$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{\boldsymbol{R}_t^3}} \ : \ 平均運動$$

とできるので,

$$\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}^T\} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

として, $\{\boldsymbol{e}\}$ 式で表示するとヒル方程式が得られる.

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - 3n^2x = \hat{a}_x, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} = \hat{a}_y, \\ &\frac{d^2z}{dt^2} + n^2z = \hat{a}_z. \end{aligned}$$

3.4 ヒル方程式の解

外力が $f = 0$ の場合, ヒル方程式には厳密解が存在する.

$$r(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \ \dot{r}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{z}(0) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix}$$

$$s = \sin nt, \ c = \cos nt$$

として, 面外運動

$$\begin{cases} z(t) = z_0c + \dfrac{\dot{z}_0}{n}s \\ \dot{z}_0 = -z_0ns + \dot{z}_0c \end{cases} \tag{4}$$

または,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dfrac{\dot{z}(t)}{n} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ \dfrac{\dot{z}_0}{n} \end{bmatrix}$$

面内運動

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -\left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right)c + \left(\frac{\dot{x}_0}{n}\right)s + 2\left(2x_0 + \frac{\dot{y}_0}{n}\right),\\
y(t) &= \left(\frac{2\dot{x}_0}{n}\right)c + 2\left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right)s - 3n\left(2x_0 + \frac{\dot{y}_0}{n}\right)t + \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n}\right),\\
\dot{x}(t) &= \dot{x}_0 c + n\left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right)s,\\
\dot{y}(t) &= 2n\left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right) - 2\dot{x}_0 s - 3n\left(2x_0 + \frac{\dot{y}_0}{n}\right)
\end{aligned}
$$

または,

$$
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \dfrac{\dot{x}(t)}{n} \\ \dfrac{\dot{y}(t)}{n} \end{bmatrix}
= \begin{pmatrix} 4-3c & 0 & s & 2(1-c) \\ 6(s-nt) & 1 & -2(1-c) & 4s-3nt \\ 3s & 0 & c & 2s \\ -6(1-c) & 0 & -2s & -3+4c \end{pmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \dfrac{\dot{x}_0}{n} \\ \dfrac{\dot{y}_0}{n} \end{bmatrix}
$$

注意 3.4.1. 次のことに注意する.

1) 行列成分を正規化するために, 速度項を n で除した.

2) $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ を仮定したが, $\boldsymbol{f} = \cos st$ の場合も厳密解が導出できる.

3) $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ のとき, 基準軌道が円軌道 $(e = 0)$ だけでなく, 楕円軌道 $(0 < e < 1)$, 放物線軌道 $(e = 1)$, 双曲線軌道 $(e > 0)$ である場合の厳密解も導出できる.

参考文献

[1] 木田隆, 小松敬治, 川口淳一郎, 人工衛星と宇宙探査機, 芝浦工業大学, 2001 年.

[2] 茂原正道, 木田隆, 宇宙工学入門 II, 1998 年.

[3] `http://lss.mes.titech.ac.jp/~matunaga/Hill-Equation.pdf`