流体と気象解析

数理科学研究会

平成 28 年 11 月 4 日

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

制作: 小池 智人

目 次

1 はじめに

気象解析については既存のデータから気象を予測していくことになるが, 取りうるデータの偏りに影響して, それらが完全に解析されているわけではない. しかし, 自然現象を数学的に表すことが可能であることから, 気象解析における理論も存在している. それらを用いてどこまでの精度の予測が可能か気になったことから学習してみたいと考えた. 今回は, 数学的手法の方に重きを置いて考えてみたい.

2 準備

2.1 ベクトル解析

今回は気象解析について考えることに伴い, 準備をしておく. 気象解析は数学的に運動方程式を使うことになることから, ベクトル解析について少し触れる. まず, ベクトル解析における用語から確認する.

- **流線**：ある点における粒子の軌道を (x, y, z) の微分方程式で示したときに現れる軌道.
- **勾配** (gradient)：スカラー場 f が与えられているとき f の勾配ベクトル ∇f を表す.
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
で表す. 但し, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ であり, これをハミルトン微分演算子という.
- **発散** (divergence)：定常な流体の流れから単位時間あたりに体積 V の流体が軌道上から失われること. ベクトル場を $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とすると, $\nabla \cdot \mathbf{a}$ で表される. 即ち,
$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$
で表される.
- **回転** (rotate)：ベクトル場からベクトル場を計算することで得られる. ベクトル場を $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とすると, $\nabla \times \mathbf{a}$ で表す.
$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \\ &:= \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\end{aligned}$$
で表される.

定理 2.1（Green の定理）
C：単一閉曲面, D：C の周とその内部からなる閉領域とする. $P(x, y)$, $Q(x, y)$ は連続な偏導関数をもち,
$$\oint_c P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

定理 2.2（Stokes の定理）
C：単一閉曲面, D：C の周とその内部からなる閉領域とし, $\mathbf{a}$ を曲面 S を含む領域で定義されたベクトル場とする. このとき,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

が成り立つ. 特に, $\mathbf{a} = (P, Q, 0)$ とすると, $dS = dxdy$ であり, Green の定理が成り立つ.

2.2　Navier-Stokes 方程式

空間上に (x, y, z) 座標系をとる. また, t を時間を表す独立変数とする. そこで流体の粒子の点 (x, y, z) をとり, 時間軸を踏まえた速度ベクトル $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ をとる. このとき, V を $\mathbb{R}^3$ の領域とし, $\mathbf{n}$ を V の外向き単位法線ベクトルとすると, 次の式が得られる.

定理 2.3（Gauss の発散定理）

$$\iint_S \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{U}\, dxdydz$$

Gauss の発散定理から, 特に $\operatorname{div}\mathbf{U} = 0$ となる流体である非圧縮性流体を考える, 例えば, 水等の流れのようなものである. このような非圧縮性流体について運動方程式を考えると, 以下のような方程式ができる.

Navier-Stokes **方程式**

$$\rho(\mathbf{U}_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{U}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0. \tag{2}$$

但し, ρ：流体の質量密度, μ：粘性係数, p：圧縮項, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, $\mathbf{U}_t = (\partial u/\partial t, \partial v/\partial t, \partial w/\partial t)$：時間微分. また, 微分作用素は

$$\mathbf{U} \cdot \nabla f = u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

(1) 式が運動方程式であり, (2) 式は非圧縮条件である. 成分で書くと,

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Delta u,$$
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v,$$
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta w,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

となる. この式を用いて, 気象解析について考えていくものとする.

3　気象解析

気象解析は, 風速場解析, 水蒸気解析, 気温解析, 収支解析, 時間 · 空間変動の解析等をそれぞれに対して行い, それらの結果を総合的にまとめ, 考察し, 予測していく. 各解析に関しては流体力学の知識をもって考察することができ, 今回もその手法に従って考えていく. 但し, ある地点に対して考えたとき完全に安定しない気圧傾度力やコリオリ力を踏まえて風速場の時間的変化を考える必要がある.

気圧傾度力：大気中における気圧の差から生まれる力のこと.

解析方法

解析方法は以下の通りである.

- ⋆ 天気図解析
- ⋆ 風速場解析
- ⋆ 水蒸気解析
- ⋆ 気温解析
- ⋆ 成層の安定性解析
- ⋆ 降水 · 雲の解析
- ⋆ 収支解析
- ⋆ 時間 · 空間変動の解析

今回はこの中から抽出して考える.

3.1　風速場解析

風 · · · 大気の流れであり 3 次元的な量. (x, y, z) 座標系から東西 · 南北 · 鉛直成分で (u, v, w) で書かれる. 風もこの (u, v, w) 座標系から表される. また, 鉛直流から水平面上に沿った 2 次元流として扱うことで考えることが出来る. 風速場から求められるのは渦度, 発散, 変形である.

3.1.1　2 次元流

風速場解析において, 流線解析がなされる. 気象のデータから流線図を出すときは, 2 次元流が用いられることが多い.

2 次元流の性質を調べるために以下の量を考える.

$$\textbf{渦度}\ :\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\textbf{発散}\ :D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\text{変形 1}\ :A = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\text{変形 2}\ :B = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

で表す. ここで, 渦度とは 2 次元流面における流れの回転を示す量であり,

$$\zeta = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint v_t\, ds$$

で示され, 直交座標系で考えると 2 次元流における渦度である. また, 発散は

$$D = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint v_n\, ds$$

により与えられ, 直交座標系で考えると 2 次元流における発散となる.
変形に関しては A, B で示される. 即ち, 流体素分の形状の変形を表すものである.

風速場の客観解析

(1) 観測点のデータから (u, v) を算出する.

(2) 観測点 $p_1, \ldots, p_i$ のデータ $u(p_i)$ から格子点 p_0 の数値 $u(p_0)$ を求める.

$$u(p_0) = \frac{\displaystyle\sum_i u(p_i) w(r_i)}{\displaystyle\sum_i w(r_i)}$$

但し, $w(r_i)$ は p_0 と p_i の距離関数 r_i の重み関数.

3.1.2　運動方程式

気塊の運動である風を運動方程式で表すとする. これは Navier-Stokes 方程式を用いて示されることがわかり, 摩擦力を無視すると

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial a} = fv - g\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial a} = fu - g\frac{\partial z}{\partial y}$$

である. 連続式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial a}$$

で示される. 運動方程式は 3 次元の分布で与えられる. 但し, 観測データによって解析が困難になることがある. そのために微分演算子を変えて渦度方程式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial a}\right)(\zeta+f)+(\zeta+f)\mathrm{div}\,v+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial a}-\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial a}\right)=0$$

や発散方程式が得られる.

3.2　水蒸気解析

水蒸気の分布は大気の層により空気の鉛直運動が作用して変動することになる. そこで, 水蒸気量を表現していくことで水蒸気圧 e, 水蒸気比湿 q, 下降水量 P に対してそれぞれを考慮した上で, 発散 · 収束について解析していく.

(1) 水蒸気圧 e：空間における水蒸気の圧力.

(2) 相対湿度 r：

$$r=\frac{e}{e_s(T)}$$

但し, $e_s(T)$ は T(絶対温度) の関数で求められる.

(3) 水蒸気混合比 q：水蒸気と乾燥空気の質量比

$$q=\frac{0.622e}{p-e}$$

(4) 比湿 s：水蒸気と湿潤空気の質量比

$$s=\frac{0.622e}{p-0.378e}$$

(5) 露点温度 T_d：p を一定に保ち冷却したのちの飽和温度

比湿を用いて解析を行う. Navier-Stokes 方程式から運動方程式を考えると,

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial q}{\partial t}+u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial a}=-m$$

で書かれる. 但し, q：比湿, m：単位時間あたりの凝結量であり, 連続式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial a}=0$$

となる.

3.3　気温解析

時間的 · 空間的に変化する気象の様子から循環系の構造や時間発展過程を理解するために気温解析を行う.

物理法則

(1) 絶対温度 (t)：セルシウス温度で計測される. 但し, 定量的な解析では絶対温度 (K) を用いる必要がある.

$$t(c) = T(k) - 273.2$$

(2) 状態方程式 (気体)

$$p\gamma = RT \qquad (\gamma：比容, R：乾燥空気の気体定数)$$

(3) 熱力学第 1 法則

$$\delta Q = c_v\, dT + p\, d\gamma = c_p\, dT - \gamma\, dp \qquad (c_v：定容比熱, c_p：定圧比熱)$$

断熱過程の場合, $\delta Q = 0$ より

$$c_p \frac{dT}{dt} = \gamma \frac{dp}{dt}.$$

(4) 温度移流：温度が移り流れていくこと. 温度変化を考えると,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\gamma}{c_p} \cdot \frac{dp}{dt}$$

(5) 静力学平衡：$\Delta z \to 0$ としたときに重力と気圧傾度力の 2 力が釣り合っている状態のこと.

3.4　成層安定性の解析

大気成層の解析は天気 · 天候と強く関連している. そこで, 大気の安定度, 不安程度の時間的変化も考察する.

気塊の断熱上昇

(1) 乾燥断熱上昇

熱力学第 1 法則と静力学の式より,

$$0 = c_p\, dT - \gamma\, dp$$
$$-\rho g\, dz = dp$$

であるから, 乾燥断熱減率 Γ_d が

$$\Gamma_d = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p}$$

により求められる.

(2) 湿潤断熱上昇：乾燥気塊が上昇すると冷却作用を及ぼすことから, 同様に湿潤断熱減率を考えると,

$$\Gamma_s = \frac{\Gamma_d}{1 + \dfrac{L}{c_p} \cdot \dfrac{dq_s}{dt}} \qquad (L\text{：定数})$$

よって, $\Gamma_d > \Gamma_s$ が得られる.

これらの結果をエマグラフという図を基に表し, それが安定か不安定かどうかを判断する.

また, 安定度に関して時間的な解析を行うと, 保存量を C_e とすると,

$$\frac{dC_e}{dt} = \frac{\partial C_e}{\partial t} + u\frac{\partial C_e}{\partial x} + v\frac{\partial C_e}{\partial y} + w\frac{\partial C_e}{\partial a} = 0$$

である. また, 連続式を考慮すると,

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} + \frac{\partial uC_e}{\partial x} + \frac{\partial vC_e}{\partial y} + \frac{\partial wC_e}{\partial a} = 0$$

となる.

3.5　収支解析, 時間 · 空間変動の解析

3.5.1　収支解析

ある物理量の時間的変動の過程を調べるには, その変動を記述する方程式が導く大きさから評価する. 観測データに基づく解析であり, 観測された現象を時間変動の過程を知ることができる. 但し, それ自体が直ちに現象のメカニズムを説明するものではない.

ある物理量 α の実質的時間変化 $d\alpha/dt$ は Navier-Stokes 方程式から,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u\frac{\partial\alpha}{\partial x} + v\frac{\partial\alpha}{\partial y} + w\frac{\partial\alpha}{\partial a}$$

と書かれる. 更に, 連続式より,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial u\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v\alpha}{\partial y} + \frac{\partial w\alpha}{\partial a}$$

が得られる. これから, α の実質的変化を求めることで前述で行ったそれぞれの解析に対する収支を見ることができる.

3.5.2　時間 · 空間変動の解析

大気現象は空間, 時間軸を変化していくことから, 気象現象それぞれに対して関係性を注視する必要がある. これは分布関数を Fourier 級数から多変量解析の技法をもとに解析していくことになる.

4　まとめと今後の課題

自身の学習不足により, 流体力学と気象解析の両者について充分な理解が得られなかったため, 今後として全体的な把握と両者を統括する考えをより深める必要がある. 特に収支解析, 時間 · 空間変動の解析に関しては, より理解を深める必要性があるため基本的なところから再度学習していきたい. また, 気象解析の手法と統計学をもとに実際にシミュレーションしていきたい.

参考文献

[1] 垣田高夫 · 柴田良弘, ベクトル解析から流体へ, 株式会社日本評論社, 2007 年.

[2] 中山司, 流体力学 非圧縮性流体の流れ学, 森北出版株式会社, 2013 年.

[3] 二宮洸三, 気象解析の基礎, 株式会社オーム社, 2005 年.