オタクスパイラルの発見と定式化

芝浦工業大学 数理科学研究会

〜第44回芝浦祭研究発表資料〜

平成28年11月4日

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

制作: BV14045 長瀬准平

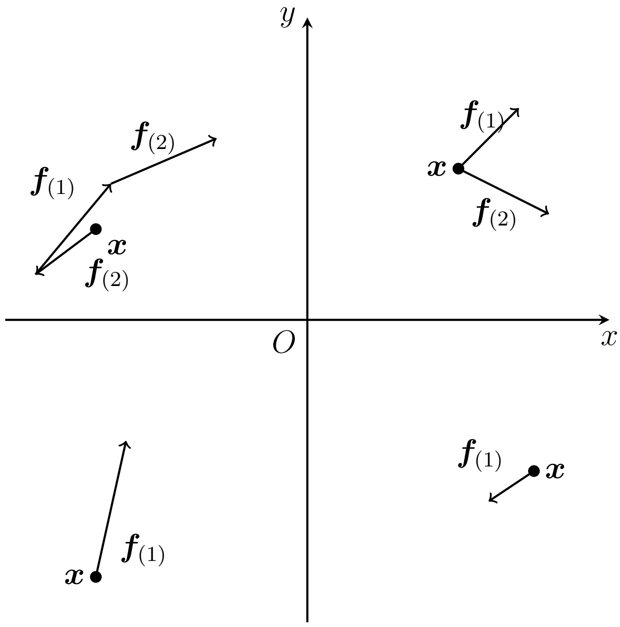
まえがき

我が国ではオタク文化が発達しているが, 同時に少子化が深刻な問題として挙げられることは周知の事実である. この二つのことに相関が全くないと言い切ることは難しい. オタク的な活動に尽くしすぎることは現実への興味関心を削ぐなど, 対人関係に何らかの影響を及ぼすだろう. そこで「オタクは, オタクとして生活することでリアルへの関心を失い, またそこから抜け出すことは難しいのではないか. 」という仮説を立てた. この現象をオタクスパイラルと名付け, その発生条件について数学的手法を用いて研究したいと思った.

今回の研究は 2016 年 5 月に行われた大宮祭で発表した内容 [1] を改善したことがメインとなっている. 詳細は後述するが, 離散化という観点からモデルを考えることで複雑な形であった最尤モデルを扱いやすい形にした. 具体的な問題に対してのシミュレーションを行ったわけではなく, 何かしらの面白そうな数理モデルが作れただけであるということをご理解いただきたい. 同様に, この資料単体でわかりやすい記述やおもしろい結果が得られているわけではないために, なんとなくどんなことをやっているのかという雰囲気を掴むためにお読みいただければと思う.

目 次

1　準備



ある空間の中にある物体の動きを考える．その物体は位置という情報 (パラメータ) を持っているが, 位置とは違うような情報 (年収, 年齢, 身長などなど) を与えても座標を考えることができる (例えば上の図でいう x 軸を年齢, y 軸を年収などとすれば, 空間ないし座標の上で物体を考えることができる)．ここではそのような物体をアイテムと呼ぶ. 今, 空間内をアイテムが適当に動き回ることとし, その挙動は時間に依存しない, すなわち現在のアイテムの地点によってのみ次の変化量が決まり, それ以外に挙動に影響するものはないとする (マルコフ性という)．この仮定により, ある時刻のおけるアイテムの位置を参照すれば, その次の時刻におけるアイテムの位置を求めることができる.

ある時刻に, ある地点 ($\boldsymbol{x} = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$) に存在するアイテムが M 通りの挙動の選択肢を持つものとし, その増分から数列あるいは微分方程式をつくる．その数列の極限, または微分方程式の (近似) 解について考察することでアイテムの挙動を調べることができる．また, このような設定によってシミュレーションがしやすくなることを見越している．このときの選択肢をイベントと呼び, それぞれに番号付けをする (j 番目のイベントを j, M 番目のイベントを M と呼ぶ)．そしてそのイベント j による影響 (どのようにそのアイテムが動くか) を $\boldsymbol{f}_{(j)}$, その確率を $p_{(j)}$ とおく．そのイベント j のみによるアイテムの微分方程式を

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_{(j)}(t) = \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

と表し, この微分方程式を j 基本式と呼ぶことにする．なお, イベント j の影響のみで表されていることに注意したい．今, 考えたいものは M 個のイベントの影響を受けた微分方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の解となる連続的な関数 $\boldsymbol{x}(t)$ ないし離散的な近似解である．以降では (1) を元に変形させたいくつかのモデルについての結果を述べていく.

用語および関数の定義と説明

- アイテム $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$
- イベント $j \in J = \{1, 2, \cdots, M\}$
- $p_{(j)} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ (イベント j の確率)
- $\boldsymbol{f}_{(j)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (イベント j の影響)

ただし, t を時刻とし, $\displaystyle\sum_{j=0}^{M-1} p_{(j)}(\boldsymbol{x}) = 1$ を満たす.

定義 1 (基本式)**.**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_{(j)}(t) = \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x})$$

1.1 基本数列

アイテム $\boldsymbol{x}(t)$ の時間を離散的に捉えて数列をつくる. $\Delta\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n$ とおいて, イベント j のみについて考えると,

$$\boldsymbol{x}_{n(j)} = \boldsymbol{x}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\boldsymbol{x}_k \tag{2}$$

と表せる. この数列の極限を考えることでイベント j のみで変化したアイテムの挙動が分かる. これを **$\boldsymbol{j}$ の基本数列**と呼ぶことにする. このような数列は j の基本式 (1) から離散化, 線形近似, 超離散化などを用いて作ることができる [1]. また, 基本式と同様, 基本数列も j の影響しか受けていないので, 考えたい結果 $\boldsymbol{x}_n$ とは異なったものである.

2 モデルの構築

前節で準備した基本的な形を元にモデルを構築した. この章では最尤モデルと期待値モデルについての説明をし, 具体的な構成方法を紹介する.

2.1 最尤モデル

基本式 (1) の $\boldsymbol{f}_{(j)}$ を関数 $\mathfrak{F}$ で置き換えた数列を考える. $\mathfrak{F}$ は

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}) \quad (j \text{ は } \boldsymbol{x} \text{ について } p_{(j)}(\boldsymbol{x}) \text{ が最も高くなる } j \in J)$$

[1] 大宮祭 [1] ではこの数列に微分方程式化を行って微分方程式を構成したが, 今回は逆の手順を取る.

と定義する. このモデルは一番確率が高いイベントを毎回選択するものとなっている.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \mathfrak{F}(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

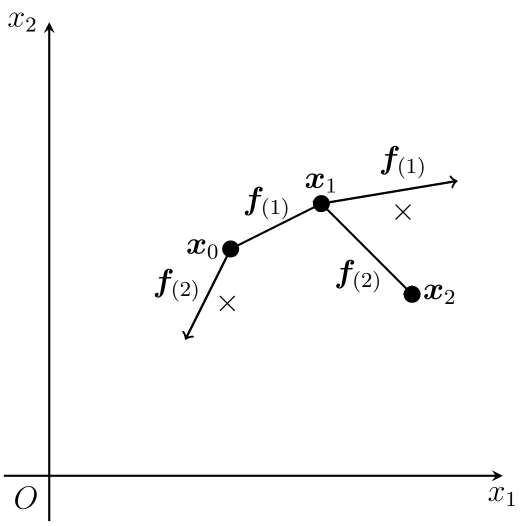
例 1. パラメータが 2 次元で, イベントも 1, 2 の 2 種類しかなく, 時間が $t_0, t_1, t_2, \cdots$ と推移するときを考える. すなわち,

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad j \in J = \{1, 2\}, \quad t \in \{t_0, t_1, t_2, \cdots\}$$

という条件設定である. 今, 簡単のために $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}(t_2) = \boldsymbol{x}_2$ とおく. 具体的な条件として, 時刻 t_0 ではイベント 1 の確率のほうが高い, 時刻 t_1 ではイベント 2 の確率のほうが高いとすると, 時刻 t_0 ではイベント 1, 時刻 t_1 ではイベント 2 を選択するのが最尤モデルのため,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_2 &= \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\boldsymbol{x}_0)) \\
&= \mathfrak{F}((\boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_0))) \\
&= \mathfrak{F}(\boldsymbol{x}_1) \\
&= \boldsymbol{f}_{(2)}(\boldsymbol{x}_1) \\
&= \boldsymbol{f}_{(2)}(\boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x}_0))
\end{aligned}$$

のようになる.



2.1.1 最尤モデルの構成

$\mathfrak{F}$ を具体的に構成したい. 構成法の一つとして, 現在の $\boldsymbol{x}$ で一番起こる確率の高いイベントの確率値を求め, その確率値からどのイベントなのかを逆算し, そのイベントを実行するという方法が考えられる. そのために新たに二つの関数として

$$\begin{aligned}
p_{\max}: \quad & \boldsymbol{x} & \mapsto \quad & \max_{j \in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right) \\
F: \quad & p_{(j)}(\boldsymbol{x}) & \mapsto \quad & \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

を用意し, その合成として $\mathfrak{F}$ を考えることができる. すなわち,

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{x}_k) = F(p_{\max}(\boldsymbol{x}))$$

である. このとき $p_{\max}$ は最大値関数の性質から (J が有限なので) 再帰的に構成でき, F も (複雑ではあるが) 構成できることが Vandermonde 行列の性質からわかる [1].

2.1.2　最尤モデルの考察

改めて最尤モデルの意味を考えると, $\mathfrak{F}$ そのものを数学的に扱いたい場合にしか役に立たない. なぜならば, 数値計算を行う場合には直接 p_j を計算し, その値を比較した上で一番大きくなる j を用いればよい (データの保存が容易に行える) からである. しかし, 前節の構成方法はあまりに複雑すぎて数学的な解析も容易でない (と思われる). また, ある点での各イベントの確率の内, 等しいものがあるようなことがあると, Vandermonde 行列の性質から F の存在を示すことができなくなるという問題もある. そのために新たな構成方法を研究した.

2.1.3　最尤モデルの構成 (再)

まず, イベントの数が少ないときに制限した $\mathfrak{F}$ を考える. 次に一つずつイベント数を増やしていくことで再帰的に $\mathfrak{F}$ を構成する.

(i) $J = \{1, 2\}$ のとき

つまり, イベントが 2 つだけのときである. $p_{(1)}, p_{(2)}$ の値によって変わる次の指示関数 $P_2 : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ を考える (後述するが, 具体的に構成できる).

$$P_2(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \bigl(p_{(1)}(\boldsymbol{x}) \leq p_{(2)}(\boldsymbol{x})\bigr) \\ 0 & \bigl(p_{(1)}(\boldsymbol{x}) > p_{(2)}(\boldsymbol{x})\bigr) \end{cases}$$

すなわち, $p_{(1)}$ と $p_{(2)}$ を比べて, $p_{(2)}$ のほうが大きければ 1, $p_{(1)}$ のほうが大きければ 0 を返すような関数になっている. P_2 を用いると, $\mathfrak{F}$ は

$$\mathfrak{F}_2(\boldsymbol{x}) = P_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{(2)}(\boldsymbol{x}) + (1 - P_2(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{f}_{(1)}(\boldsymbol{x})$$

と表せる (イベントが 2 つしかないことを強調するために $\mathfrak{F}_2$ と表記した).

(ii) $J = \{1, 2, 3\}$ のとき

イベントが 3 つのときは P_2 の定義を少し変え, $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}$ を比べて, $p_{(3)}$ が一番大きければ 1, それ以外のほうが大きければ 0 を返すような関数として定義すれば, $\mathfrak{F}_2$ のときと同様に $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_3$ と表記して

$$\mathfrak{F}_3(\boldsymbol{x}) = P_3(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{(3)}(\boldsymbol{x}) + (1 - P_3(\boldsymbol{x}))\mathfrak{F}_2(\boldsymbol{x})$$

と表せる.

(iii) $J=\{1,2,3,\cdots,M\}$ のときイベントが M 個, すなわち一般のときである. P_2, P_3 と同様に

$$P_M(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} 1 & \left(\max\limits_{j\in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right) = p_{(M)}(\boldsymbol{x})\right) \\ 0 & \left(\max\limits_{j\in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right) \neq p_{(M)}(\boldsymbol{x})\right) \end{cases}$$

とする. すなわち, イベント $j\in J$ の中で一番起きる確率が高いイベントが M であるときに 1, そうでないときに 0 を返す関数である. P_M を用いれば, $\mathfrak{F}_M$ は結局,

$$\mathfrak{F}_M(\boldsymbol{x}) := P_M(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{(M)}(\boldsymbol{x}) + (1-P_M(\boldsymbol{x}))\mathfrak{F}_{M-1}(\boldsymbol{x})$$

となる. 再帰的に $\mathfrak{F}_{(j)}$ を定義していくことで $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_M$ を構成することができる.

(iv) P_M の構成

最後に, P_M を具体的に構成する.

$$P_M(\boldsymbol{x}) := 1 - \frac{p_{(M)}(\boldsymbol{x}) - \max\limits_{j\in}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right)}{p_{(M)}(\boldsymbol{x}) - \max\limits_{j\in J\setminus\{M\}}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right)}$$

と定義すればよい[2]. なお, $M=1$ のときは $\max\limits_{j=1}(p_j) \equiv p_{(1)}$ であるから, $P_1 \equiv 1$ である. 新たに定義した P_M が前述の指示関数と一致することを示す.

証明. $\max\limits_{j\in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right) = p_{(M)}(\boldsymbol{x})$ のとき, $p_{(M)}(\boldsymbol{x}) - \max\limits_{j\in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right) = 0$ であり, $P_M(\boldsymbol{x}) = 1$. $\max\limits_{j\in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right) \neq p_{(M)}(\boldsymbol{x})$ のとき, $\max\limits_{j\in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right) = \max\limits_{j\in J\setminus\{M\}}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right)$ であることから, $P_M(\boldsymbol{x}) = 1-1=0$ となる. よって,

$$P_M(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \left(\max\limits_{j\in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right) = p_{(M)}(\boldsymbol{x})\right) \\ 0 & \left(\max\limits_{j\in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right) \neq p_{(M)}(\boldsymbol{x})\right) \end{cases}$$

を満たす. □

よって, P_M も構成することができた. P_2, P_3 も $M=2,3$ を代入すれば求まる.

以上の結果をまとめると,

$$\mathfrak{F}_M(\boldsymbol{x}) := \left(1 - \frac{p_{(M)}(\boldsymbol{x}) - \max\limits_{j\in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right)}{p_{(M)}(\boldsymbol{x}) - \max\limits_{j\in J\setminus\{M\}}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right)}\right)\boldsymbol{f}_{(M)}(\boldsymbol{x}) + \frac{p_{(M)}(\boldsymbol{x}) - \max\limits_{j\in J}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right)}{p_{(M)}(\boldsymbol{x}) - \max\limits_{j\in J\setminus\{M\}}\left(p_{(j)}(\boldsymbol{x})\right)}\mathfrak{F}_{M-1}(\boldsymbol{x})$$

となる. (ただし, $\mathfrak{F}_1$ は便宜上 $\boldsymbol{f}_{(1)}$ と定義しておく.)

[2] ただし, 厳密には $J=\{1,\cdots M\}$ のときの, 言うなれば P_J を表した式であり, 一般には max の部分の添え字を書き直す必要があることに注意したい.

さらに $\mathfrak{F}_j$ を再帰的に書き下していくと,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}_M =& P_M \boldsymbol{f}_{(M)} + (1-P_M)\mathfrak{F}_{M-1} \\
=& P_M \boldsymbol{f}_{(M)} + (1-P_M)(P_{M-1}\boldsymbol{f}_{(M-1)} + (1-P_{M-1})\mathfrak{F}_{M-2}) \\
=& P_M \boldsymbol{f}_{(M)} + (1-P_M)P_{M-1}\boldsymbol{f}_{(M-1)} + (1-P_M)(1-P_{M-1})\mathfrak{F}_{M-2} \\
=& P_M \boldsymbol{f}_{(M)} + (1-P_M)P_{M-1}\boldsymbol{f}_{(M-1)} + (1-P_M)(1-P_{M-1})(P_{M-2}\boldsymbol{f}_{(M-2)} + (1-P_{M-2})\mathfrak{F}_{M-3}) \\
&\vdots \\
=& P_M \boldsymbol{f}_{(M)} + (1-P_M)P_{M-1}\boldsymbol{f}_{(M-1)} + (1-P_M)(1-P_{M-1})P_{M-2}\boldsymbol{f}_{(M-2)} \\
&+ \cdots + (1-P_M)(1-P_{M-1})\cdots(1-P_2)\boldsymbol{f}_{(1)} \\
=& P_M \boldsymbol{f}_{(M)} + (1-P_M)P_{M-1}\boldsymbol{f}_{(M-1)} + (1-P_M)(1-P_{M-1})P_{M-2}\boldsymbol{f}_{(M-2)} \\
&+ \cdots + (1-P_M)(1-P_{M-1})\cdots(1-P_2)P_1\boldsymbol{f}_{(1)} \\
=& \sum_{i=1}^{M-1}\left(P_i\boldsymbol{f}_{(i)}\prod_{k=i+1}^{M}(1-P_k)\right) + P_M\boldsymbol{f}_{(M)}
\end{aligned}
$$

となる. 簡単のために $(\boldsymbol{x})$ は省略した.

3 今後の課題

イベントとその確率および影響を確率空間上で考えることで, 測度論および公理的確率論の結果を用いて議論を進める. また, 何か具体的な結果について適用することで従来の確率論から得られる結果と比較したい.

参考文献

[1] 長瀬准平, オタクスパイラルの発見と定式化, 大宮祭, 2016.
`http://sitmathclub.web.fc2.com/seisaku/oomiyasai2016/shiryou/nagase_s.pdf`

[2] 広田良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, 2003.

[3] 久保拓弥, データ解析のための統計モデリング入門, 2012