みんなが納得するバトルMCランキング

芝浦工業大学　数理科学研究会

西木 航

～芝浦祭研究発表～

2016 年 11 月 05 日

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします.

目 次

結果データは比較しやすいように, 後半にまとめてあります.
不足しているデータや修正を追加し, 再掲載することがあります.

1 まえがき

1.1 対象読者

この資料を閲覧した人はタイトルにある MC バトルというワードに惹かれた人が多いだろう．そのような人には勿論, ランキングを作ることが出来るものには適用できるため, スポーツファンや世界ランクなどに興味がある人にも十分楽しんで貰えるだろう．また, 線形代数や数値解析を学んだ人には是非勧めたい. 数学を学ぶ意義を感じるはずだ．更に, 数学の知識が乏しい人でも読みやすいようになるべく多くの例と簡単な解釈を載せているので, 興味を持った全員が読者となり得るだろう．読み進めるに当たって見づらくなりそうな専門用語の説明は省く場合はある．その場合は読み飛ばすか, 個々で調べていただきたい.

1.2 研究背景

私は, もともとデータを処理や分析することに興味があり, その中でレイティングやランキングの手法が持つ力に惹かれたため, 研究という名を借りて実践することを決めた．大学で線形代数を学び, 理解が進んだこともきっかけと言えるだろう．今回は, 「フリースタイルダンジョン」という番組をきっかけにはまったフリースタイルバトルの MC に対して, みんなが納得出来るようなランキングをつけることを目標にした．ランキング付けの手法にもバトル MC ランキングにも強く関心がある自分にとってはまさに, 一石二鳥であるが, どちらかにしか興味がない人にも楽しく読んで貰えるように心がけているので, 是非手にとって読んでいただきたい.

1.3 前提知識

対象読者の節で述べたように, なるべく前提知識が少なくとも雰囲気が掴めるように努めているが, 全てを理解するためには入門的な線形代数の知識が不可欠である．数学に興味が薄い人は読み飛ばしても構わないが, 気になる方はこの資料とは別に線形代数の資料があると良い．特に, 連立一次方程式や固有ベクトルを求めることで解が得られるが, 解が一意に存在することが言えれば, MATLAB という便利なソフトによって解が求まってしまうため, その解き方には深く触れない．また, 「MC バトルって何?」と思った方はこれを機にテレビや abemaTV で何戦か観ることをおすすめする．夢中になってこの資料を見ていたことも忘れてしまう方も現れるだろう．最後の二文は作者の戯れ言なので気にしなくても良い.

2　ランキング付けの手法

まず, これから乱用するレイティングとランキングというワードについて説明する. **レイティング**とはそれぞれの要素（チーム）が持つ数値得点のリストを示し, **ランキング**とは要素をランク順に並び替えたリストを示す. 今回は, それぞれの要素にある方法で数値得点を与えることで出来たレイティングリストをソートする（数値の大きい順に並び替える）ことでランキング化する.

ここで簡単な例を紹介する.

	国語	英語	数学
佐々木	85	70	78
井上	82	80	86
牛丼	69	55	92
餃子	75	40	78
春巻き	70	75	98

例えば各教科 100 点満点のテストの数値得点を”「国語」+「英語」+「数学」×2” で決めるとする. このとき以上の結果になったとすると,

$$
\begin{aligned}
85 + 70 + 78 \times 2 &= 311 \\
82 + 80 + 86 \times 2 &= 334 \\
69 + 55 + 92 \times 2 &= 308 \\
75 + 40 + 80 \times 2 &= 275 \\
70 + 75 + 98 \times 2 &= 341
\end{aligned}
$$

のように評価ができ, 以下のようなレイティングリストが作られる.

$$
\begin{array}{r}
\text{佐々木} \\ \text{井上} \\ \text{牛丼} \\ \text{餃子} \\ \text{春巻き}
\end{array}
\begin{pmatrix} 311 \\ 334 \\ 308 \\ 275 \\ 341 \end{pmatrix}
$$

この表に対して数値の大きい順のランキングリストを作ると,

$$
\begin{array}{r}
\text{佐々木} \\ \text{井上} \\ \text{牛丼} \\ \text{餃子} \\ \text{春巻き}
\end{array}
\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

のようになり, 上から「春巻き」,「井上」,「佐々木」,「牛丼」,「餃子」とランキングが作られた.

このとき行うレイティングの数値得点の作り方は, 目的や手法によって様々である. 今回は数ある手法の中で Massey の手法と Colley の手法について扱う.

ξ　**注意**　ξ

上記から考えることが出来るが, レイティングリストからランキングリストは作成可能であるのに対し, その逆は不可能である.

2.1 Massey の手法

Massey の主な考え方は試合の得点差をレイティングの数値得点として扱い, 最小二乗法で近似解を求めるというものだ.

具体的に説明する. はじめに, y_k を試合 k の得点差, r_i, r_j はそれぞれ i, j のレイティングを示し,

$$r_i - r_j = y_k.$$

という理想化された数式で表す. これは, 対戦相手の強さを考慮するための設定である. この設定によって, レイティングを単純な勝敗や得点差の和のみで評価するを避けることが出来る. つまり, 得点差というものを対戦するお互いのチームの (実力的) 強さの差として評価を繰り返すことで, 理想のランキングをつくれると考えられる. また, m : 試合数, n : チーム数の係数行列 $X_{m\times n}$ のそれぞれの行に i 列目に 1, j 列目に -1, 他を 0 とし,

$$X\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y}$$

と記述できる. このことは行列の性質から容易に想像できるだろう.

念のため例を紹介する.

表 1: ブロック表

グループ E	勝ち点	試合	勝利	分け	敗戦	得点	失点	得失点差
日本	22	8	7	1	0	27	0	27
シリア	18	8	6	0	2	26	11	15
シンガポール	10	8	3	1	4	9	9	0
アフガニスタン	9	8	3	0	5	8	24	-16
カンボジア	0	8	0	0	8	1	27	-16

表 2: 対戦結果

アフガニスタン	0-6	シリア
カンボジア	0-4	シンガポール
日本	0-0	シンガポール
カンボジア	0-1	アフガニスタン
日本	3-0	カンボジア
シリア	1-0	シンガポール
カンボジア	0-6	シリア
アフガニスタン	0-6	日本
シンガポール	1-0	アフガニスタン
シリア	0-3	日本
シリア	5-2	アフガニスタン
シンガポール	2-1	カンボジア
シンガポール	0-3	日本
アフガニスタン	3-0	カンボジア
カンボジア	0-2	日本
シンガポール	1-2	シリア
シリア	6-0	カンボジア
日本	5-0	アフガニスタン
アフガニスタン	2-1	シンガポール
日本	5-0	シリア

上にある表は「2018 年ワールドカップのロシア大会アジア地区予選グループ E」の結果である．この結果を実際に式に当てはめると次のように表せる．（量が多いので省略．）

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \\ \\ \vdots \\ 5 \end{pmatrix}.$$

本題に戻る．例からも分かるように，この $X\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y}$ という方程式は優決定系であることが多い．優決定系とは，変数の数に対して制約式が多く，解が存在しないものである．このような場合，解が存在しないため，近似解を求める．そこで，最小二乗法によって作られた**正規方程式** $X^T X\boldsymbol{r} = X^T\boldsymbol{y}$ から解が得られる．

ここで「最小二乗法」が何か説明すると，残差 $X\boldsymbol{r} - \boldsymbol{y}$ を二乗した値が最小になるような解 $\boldsymbol{r}^*$ (本来求めたかった $\boldsymbol{r}$ の近似解) を考えるものだ．等式でかくと次のように表すことが出来る．

$$\boldsymbol{r}^* = \arg\min_{r} ||X\boldsymbol{r} - \boldsymbol{y}||^2.$$

更に,「正規方程式」の導出を行う. 流れとしては最小化したい $||X\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y}||^2$ の各成分において凸な二次関数であるので, $\boldsymbol{x}$ の各成分で偏微分する. つまり勾配ベクトルが 0 となるようなものを考える. 但し, $\boldsymbol{y}^T X\boldsymbol{r}$ はスカラーであるから $\boldsymbol{y}^T X\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{y}^T X\boldsymbol{r})^T = \boldsymbol{r}^T X^T \boldsymbol{y}$ という事を用いる. また, $X^T X$ が対称行列であるから $\frac{d}{d\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r}^T X^T X\boldsymbol{r}) = 2X^T X\boldsymbol{r}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\boldsymbol{r}}||X\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y}||^2 &= \frac{d}{d\boldsymbol{r}}(X\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y})^T(X\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y}) \\
&= \frac{d}{d\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r}^T X^T X\boldsymbol{r} - \frac{d}{d\boldsymbol{r}}\boldsymbol{y}^T X\boldsymbol{r} - \frac{d}{d\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r}^T X^T\boldsymbol{y} + \frac{d}{d\boldsymbol{r}}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} \\
&= 2\,(X^T X\boldsymbol{r} - X^T\boldsymbol{y}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

従って, $X^T X\boldsymbol{r} = X^T\boldsymbol{y}$ で解を求めることが出来る $(M_{n\times n} := X^T X,\ \boldsymbol{p}_{n\times 1} := X^T\boldsymbol{y})$.

ところで, 実はこのとき M を計算する必要はない. それは X の構造を考えればすぐに分かるのだが, 対角要素 M_{ii} はチーム i の総試合数, $i \neq j$ の非対角要素 M_{ij} はチーム i がチーム j が戦った試合の数に -1 をかけたものになる. 同様に, $\boldsymbol{p}$ の i 行目の要素は, チーム i が行った全試合の得点差の合計であることから, 直ちに

$$M\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}$$

という式を作ることが出来る. これで未知の $\boldsymbol{r}$ を求めるための式の準備は出来た. また, このときの行列 M にはいくつか注目すべき点がある. 一つ目は, 優対角行列 $(|x_{ii}| \geq \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|(i \neq j))$ であること. 二つ目は, X の時は「試合数」が行数となり莫大な大きさになることも考えられたが, M の大きさは必ず「チーム数」×「チーム数」の n 次対称行列で済むことである. そしてもう一つが, M の任意の行の合計が 0 になることである. その結果, M の列が線形従属になる. このことは $rank(M) = n-1$ であり, 一意の解を持たないので重要な性質である. この問題の解決策として M のある一行の成分の値を 1 にする. 更に, それに対応する $\boldsymbol{p}$ の成分を 0 にする. この修正によって, 全チームのレイティングの総和が 0 になるという制限が加わり, 標準の線形計算 (ガウスの消去法など) で解を求められる.

2.2 Colley の手法

Colley の手法の基本的な考え方は一般的な勝率を使ったレイティングシステムを改良したものである. Massey の手法と違い, 得点は扱わない. さて, その一般的勝率を使ったチーム i のレイティングの値 r_i は次のように与えられる.

$$r_i = \frac{w_i}{t_i}$$

このときの w_i をチーム i が勝利した数, t_i をチーム i が参戦した試合の合計数である. このレイティングシステムは簡潔で分かりやすいが, 明らかな欠陥をいくつも持っている. 一つ目に, 対戦相手の強さが全く考慮されていない. リーグで最も強いチームに勝つことと, 最も弱いチームに勝つことが同じ評価になってしまう. 二つ目に, レイティングのスタートが $\frac{0}{0}$ となり, シーズンが進んでも勝利数が 0 ならば, レイティングも 0 となってしまう. そして三つ目に, 引き分けへの対応である. 引き分け時への妥当案として勝利, 参戦をともにしない扱いをすることが考えられる. そのことで, シーズンが進んでもレイティングが $\frac{0}{0}$ になってしまったり, 不可解なレイティングを示すものが現れる. このような欠陥のいくつかを改善するために手法を提案する.

まず, 従来の勝率の式に若干の修正を加える. それが以下の式である.

$$r_i = \frac{1+w_i}{2+t_i}. \tag{1}$$

この修正方法は, ラプラスの「継起の法則」に由来している. 一見この修正は些細なものに見えるが, いくつかの優れた点がある. まず第一に, シーズンの初期値が $\frac{0}{0}$ という無意味だったものが $\frac{1}{2}$ というそれぞれのチームが均等になるような設定になっている. また, 試合数を重ねると, 基準の値から上下にぶれていくのである. 最後に $0 < r_i < 1$ であることだ. 式を見れば一目瞭然ではあるが, この指標によって絶対に勝つ, 絶対に負けるという危険なレイティング結果が存在しなくなるのだ. 更に, このレイティング法を用いてチーム同士の相互依存性組み入れる （但し, l_i をチーム i が負けた試合数とする. ）. まず, w_i を次のように式変形する.

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{w_i - l_i}{2} + \frac{w_i + l_i}{2} \\ &= \frac{w_i - l_i}{2} + \frac{t_i}{2} \\ &= \frac{w_i - l_i}{2} + \sum_{j=1}^{t_i} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

シーズン開始の時点で全てのチームのレイティングが $r_j = \frac{1}{2}$ で始まるため, O_i をチーム i の対戦相手の集合とするとき, 最初に総和 $\sum_{j=1}^{t_i} \frac{1}{2}$ は $\sum_{j \in O_i} r_j$ となる. シーズンが進むにつれて, ずれが生じるが, チームの対戦相手のレイティングの累積によって十分近似される. なぜならば, それぞれのチームを考えると, レイティングの中心点 $\frac{1}{2}$ の上下を行ったり来たりするが, 全体的には, 全レイティングの平均値 $\bar{\boldsymbol{r}}$ は $\frac{1}{2}$ の列ベクトルと同じように考えられる (保存特性) . よって, 以下の式が成り立つ.

$$w_i \approx \frac{w_i - l_i}{2} + \sum_{j \in O_j} r_j.$$

これを等式とみなして, 式 (1) にこの結果を代入すると以下の式が得られる.

$$r_i = \frac{1 + (w_i - l_i)/2 + \sum_{j \in O_j} r_j}{2 + t_i}. \tag{2}$$

この式は未知の r_i は他の未知数である r_j に依存することを示している. このことは, Colley の手法がチームのレイティングに対戦相手の強さを組み込んでいることを明らかにしている. また, 未知のレイティング r_j を用いているが, 行列の計算方法から r_i が r_j に依存していることは問題なく, r_i が簡単に計算できることが考えられる.

ここで, 更に式 (2) に変形を行うと次のように書くことが出来る.

$$(2+t_i)r_i - \sum r_j = 1 + \frac{w_i - l_i}{2}. \tag{3}$$

先ほど述べたように Colley の式を行列表記を行いたい. 実際, 式 (3) は線形系 $C\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}$ として簡潔に表記できる. このとき, $\boldsymbol{r}_{n\times1}$ は未知のレイティングベクトル, $\boldsymbol{b}_{n\times1}$ は $b_i = 1 + \frac{1}{2}(w_i - l_i)$ として定義される右辺ベクトル, そして, $\boldsymbol{C}_{n\times n}$ は, n_{ij} がチーム i と j がお互いと対戦した回数であるときに

$$C_{ij} = \begin{cases} 2 + t_i & (i = j) \\ -n_{ij} & (i \neq j) \end{cases}$$

として定義される Colley の係数行列である. $C_{n\times n}$ が正則行列であるから, $C\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}$ は常に一意の解をもつ.

2.2.1　Colley の性質

Colley には, 線形的性質と手法的性質があるのでいくつか紹介する．まず, $\boldsymbol{C}$ が実対称正定置行列であることに注目してほしい．このような行列は, $\boldsymbol{U}$: 上三角行列であるときに, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}$ となるコレスキー分解が可能である．コレスキー法はガウスの消去法よりも $\frac{n^3}{3}$ だけ計算量が少ないので, $\boldsymbol{Cr} = \boldsymbol{b}$ を効率よく解くことが出来る．ただ, 行列の大きさが十分に小さいので, 標準的でよく行われる数値計算ルーチンで高速にレイティング $\boldsymbol{r}$ を求められる．また, 手法的なものとして鍵となる特性は, 試合の得点が全く考慮されていないことだ．これは, 見方によっては, モデルにとって強みとも弱みとも捉えられる．例えば, 敵の強さによって一次関数的に得点の差が開くものには, 得点を用いる Massey の手法の方が有効だが, 指数関数的に得点差が開くものには, Colley の手法を用いた方が有効であると考えられる．また, 単に得点差に相当するもののデータが存在しない, もしくは望ましくない場合に適している．

2.2.2　Maseey の手法と Colley の手法の関連性

Massey の手法と Colley の手法は, 一見考え方が全く違うように見えるものの, 顕著な関連性があるのである．実は, これらの二つの手法は $\boldsymbol{C} = 2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}$ という式で関連付いている．その結果, Massey の手法を Colley 化したり, その逆をするのは簡単である．例えば, $\boldsymbol{Mr} = \boldsymbol{p}$ という Massey の手法は以下の式によって Colley 化できる． (Colley 化された Massey の手法では, 右辺に得点情報を含む $\boldsymbol{p}$ を用いる.)

$$(2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}.$$

係数行列に $2\boldsymbol{I}$ を加算することでレートの調整を行っている．また, このことによって修正された係数行列は狭義優対角行列となり, 正則行列 (非特異行列) であるから, 特異点を除くために Massey の手法で行った「式を置換する」というやり方が必要なくなった．但し, Colley とは違い, 得点数 $\boldsymbol{p}$ を含むので偏りがない (バイアスフリー) とは言えない．この方法は, 基本的に Massey の手法と同じランキング順になるが, 若干異なることもあり得る．

同様に, Colley の手法を Massey 化して, 線形系 $\boldsymbol{Mr} = \boldsymbol{b}$ を解くこともできる．

2.3　Massey の手法と Colley の手法の例題

表 1, 表 2 を用いて実際にレイティングを行う．(調整中)

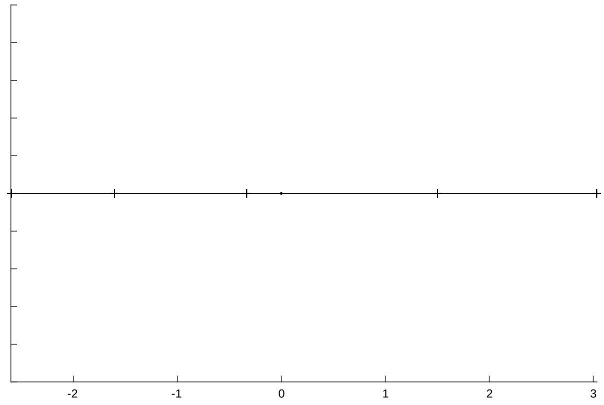


図 1: Massey の手法

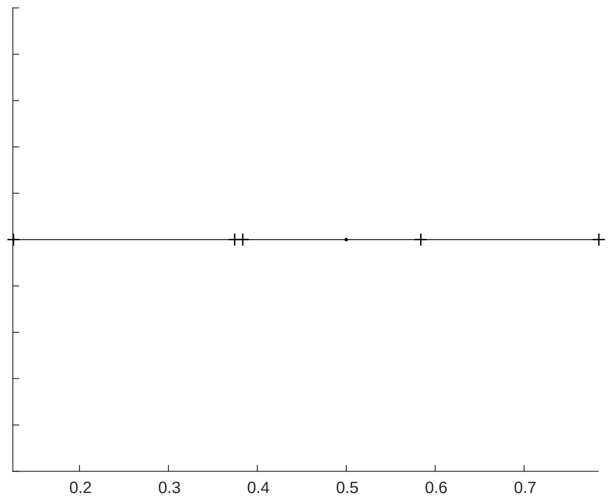


図 2: Colley の手法

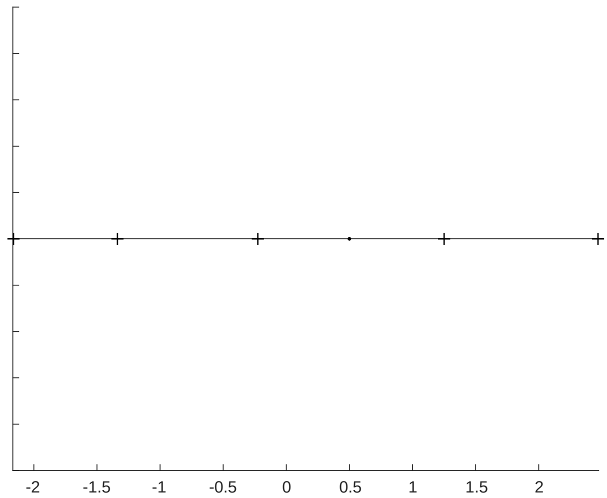


図 3: Colley 化の Massey

3 計算方法まとめ

3.1 Massey の手法

- 任意の i, j チームの得点差をレイティングの差として扱う．(基本的には引き分けは試合をしないものとする.)
- 優決定系になり, 一意に解が求まらないことが多いので近似解を求める式を導出する. 行列 $\boldsymbol{M}_{n\times n}$ に対角成分 $\boldsymbol{M}_{ii}$ に i チームの総試合数, 非対角成分 $\boldsymbol{M}_{ij}$ $(i \neq j)$ に i と j チームの対戦の総試合数に (-1) をかけたものを入れる. $\boldsymbol{p}_n$ ベクトルの p_i 成分には i チームの総得失点差を入れる.
- $rank(M) = n - 1$ であるから, $\boldsymbol{M}$ のある行を全て 1 に, その選んだ行に対応する p の成分を 0 に入れ替える.
- $\boldsymbol{Mr} = \boldsymbol{p}$ を解く.

4 重み付け

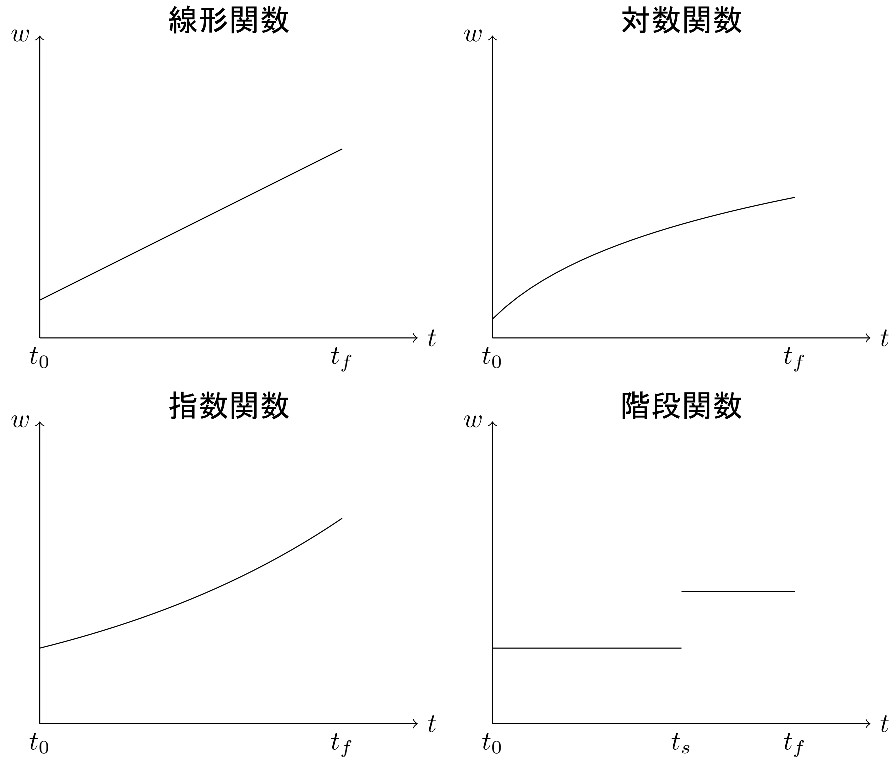
もともとの数値得点 v に対して重み付けを考えると, 次のような式で表せる.

$$\overline{v_{ij}} = w_{ij} v_{ij}$$

但し, w_{ij} はチーム i, j 間で戦われた試合の重みを表すスカラーである. w_{ij} は重み関数によって決定される．中でも, 時間に依存する関数によって重みつけられることが多い．なぜなら知りたい強さというものは, 今の強さであるからだ (. 昔よりも成長もしくは退化することを考えることは妥当だろう). つまり, 昔の試合の時よりも, 今の試合の時の方が, より今の自分の実力が試合結果に表れるだろう．したがって, 現在に近ければ近い試合ほど, 今の強さを物語る為, レートへの影響大きくすることが妥当であると考える. 具体的なウエイトを提案する. また, 重み付けを考えるときに, レートのぶれ方にも影響が及ぶので, 気をつけるべきである.

4.1 時間に依存する基本的な重み付け

試合を重みつけるのは, 大抵のモデルでは容易い. そこで線形, 対数, 指数, 階段の各関数による 4 つの重み付けを例として紹介する. 勿論, この重みの考え方は, 任意の方法, 組み合わせが考えられる. まず, 実際にこの 4 つの関数がどのような形をしているか図と関数から確認しよう.



まず, 線形的な (一次関数の) 重みの付け方では次のような式で表せる.

$$w_{ij} = \frac{t - t_0}{t_f - t_0} + \alpha.$$

分子は, シーズン開始時に対する, その試合の相対的な開催日を表している. 具体的には, 分子は, シーズン開始日 t_0 からの日数で, 分母は, シーズン中の全日数である. 全日数は, シーズン終了日 t_f から開催日 t_0 を引くことで与えられる. (また, α は初期にも重みを持たせるような調整ができる様に用意した定数である. これからは α についての説明を省略する.)

もしも, 後の方の試合に, より緩く増加するような重みを付加したいのであれば,

$$w_{ij} = \log\left(\frac{t - t_0}{t_f - t_0} + 1\right) + \alpha$$

という対数重み付けを用いる. 一方, シーズン終盤の試合の重みを極端に誇張したいのであれば, 次の指数的な重みを考える.

$$w_{ij} = \mathrm{e}^{\frac{t - t_0}{t_f - t_0}}.$$

また, この関数だとレイティングの上がり下がりに差が激し過ぎると感じる場合は, $w_{ij} = \sqrt{\mathrm{e}^{\frac{t-t_0}{t_f-t_0}}}$ という重み付けを考えれば良い.

そして最後に考えるのは階段関数である. 一つの階段関数によって, シーズン後半や終盤に対して, 重みを通常の場合の倍にするようなことを考えることが可能である. このような手法は, Luke Ingram の修士論文の実験で示されているように, 特にバスケットボールの試合では, 非常に上手く機能するらしい $\cdots$ [1]. 実際に階段関数の例を挙げてみると,

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ (チーム } i,\ j \text{ 間の対戦が, ある日にち } t_s \text{以前に開催される場合)} \\ 2 \text{ (それ以外)} \end{cases}$$

のように考えられ, t_s をある特定の日にちで置けば良い. 勿論, 多重階段関数も同様に, 簡単に実装できる.

これまで 4 つの重み付けを紹介してきた. そこで, 実際に特定のランキング手法に重み付けをどのように適用されるのかについて考える.

4.2 重み付けの組み入れ

重み付け Massey の手法

Massey のモデルでは, シーズン中の各試合が, 元来の Massey の線形連立方程式 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y}$ の各行で表される. 各試合に任意に選ばれた (時間に関するような) 重み付け (など) によって, 重みを組み入れることが可能である. この場合, $\boldsymbol{X}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y}$ は, **重み付け最小二乗法** として解かれる. まず, 各試合に付随した重みベクトル $\boldsymbol{w}$ が生成される. そこで, $\boldsymbol{w}$ が対角成分に並ぶように, $\boldsymbol{w}$ を対角行列 $\boldsymbol{W}$ に変換する. 最後に, 重み付き正規方程式

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

を解き, $\boldsymbol{r}$ を最小二乗法によって求める.

重み付け Colley の手法

Colley の手法を重みつけるために, Colley の行列 $\boldsymbol{C}$ の非対角成分は, 各チームの対戦回数を表す整数ではなく, 各試合の重要性に付随した重みとなる. 例えば, $\boldsymbol{C}_{ij} = 3$ というのは, もともと i と j の対戦回数が 3 であることを表していたが, 重みによって調整されているため, 試合数を表すものではなくなっている. また, 時間軸についての関数ではなく, $\boldsymbol{C}_{ij}$ に対する, つまり, チーム i, j が対戦することに対する重要度を表すものも導入出来るだろう. 同様に, 右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ は, 勝ち数の総計から負け数の統計を引いた数ではなく, 重みつけられた数となる.

フリースタイルダンジョンに関する重み付け

フリースタイルダンジョンによって, MC バトルが流行ってから, (モンスターは特に) 全体的に実力が上がった. 従って, 最近のバトルほどレイティングの上がり下がりが激しいのは自然であろう. ただし, 人によって対戦数, 対戦時期に偏りがあるので, 最初からレイティングに影響が及ぶように考え, 殆どウエイトを付けない. また, 番組が始まった当初は手探りであったり, 流行った時期が, 中盤であったことから対数関数 $\left(\log(\frac{t-t_0+1}{t_f-t_0+1}+1)+\frac{1}{2}\right)$ を採用する.

4.3　フリースタイルダンジョンによる調整

モンスターチャレンジャー問題

この関係性は少なくとも立場に大きな影響を及ぼす．なぜなら, チャレンジャーは先攻後攻を選ぶことができる．しかし, モンスター側には事前にチャレンジャーが誰か知らされる．従って, 通常不利である先行が調整できる．また, モンスターは師匠のような存在やテレビ番組を背負っていて, 判定する人もレギュラー化しているため, モンスターが強い前提で考えられる．さらに, モンスターが負けてもチャレンジは続くが, チャレンジャー側が負ければ即退場なので, モンスター側への投票はリスクを伴う．しかし, モンスター側と異なり, チャレンジャー側は慣れていない環境であるため, 最初は緊張し, 実力が出せない可能性が高い．従って, 公平な物として考える．(実際は調整を考える方が正確なデータが取れるだろう．) ところで, モンスター側とチャレンジャー側両方を経験している MC が二人いる．これは先ほど述べたとおり, 公平であるとは考えられるものの, 環境や立場として大きく異なるため, 別人として考えるのは妥当であろう．従って, モンスター側 (M) , チャレンジャー側 (T) としてデータを分けて判定する．

更に, モンスターは回を重ねることで強くなることを予想できるが, それ以上に「般若」の試合があることに大きなインパクトを受けている (. 実際, モンスター達は自分を見つめ直す機会になったり, 合宿を行ったりしている). そこで, チャレンジャー側だけのランキングを考え, モンスターを「般若」戦で区切り, 別人として考える．フリースタイルダンジョンの視聴者なら理解できると思うが, 「漢」に関しては「輪入道」戦から切り替える．

ラウンド数問題

多くの MC のバトルしたラウンド数が少ない, つまりデータ量が小さいので, 正確なデータを出すのは難しいだろう．ただし, 誰もが番組に呼ばれるほどの実力であることは確かであり, 明らかに差が無ければ, 一発でクリティカルヒットになることは少ないため, 特に問題視はしない．また, 対戦数が極端に少ない (弱い) MC にモンスターが勝つことは有利になりすぎることが考えられるが, 実際はレイティングの変動が下に強く働くので, そういう意味で調整はできている．しかし, 極端にレイティングが下がることは好ましくないため, ラプラスの継起のような調整を行ったものを実践では採用する．
フリースタイルダンジョンではクリティカルヒット (5-0) になるとラウンド数に関係なく勝敗が決定する．従って, 5-0 の一試合で終了することと, 3-2, 5-0 の二試合で終了することを比較する事を例にあげて考える．

得点問題

フリースタイルダンジョンの判定のやり方から, 得点差が 1, 3, 5 の 3 通りのみに絞られる．また, クリティカルヒットで勝つのと, 3-2 で勝つのは大きく異なる．従って, 得点差を扱う Massey が好ましいと考える．

5 実践

5.1 Massey の手法

表 3: Massey の手法

1	8.1458	般若	26	−0.0881	ENEMY
2	5.6454	崇勲	27	−0.1522	SALVA
3	4.9792	焚巻	28	−0.4764	Lick-G
4	4.9386	Mr.Q	29	−0.4978	LEON
5	4.9119	R 指定	30	−0.5025	ANSWER
6	4.543	スナフキン	31	−0.8358	漢
7	4.0824	HIDADDY	32	−1.1298	田中
8	3.968	龍道	33	−1.4628	黄猿
9	3.8313	押忍マン	34	−1.4686	RACK
10	3.4889	KOPERU	35	−1.4686	Mr.smile
11	3.2719	GADORO	36	−1.4686	KUREI
12	2.8702	DOTAMA	37	−1.4978	GOMESS
13	2.8101	GASHIMA	38	−2.4978	BALA
14	2.3481	掌幻	39	−2.4978	はなび
15	1.5429	CHICO	40	−2.8358	RYOTA
16	1.5314	T-PABLOW	41	−3.4686	REIDAM
17	1.5226	USU	42	−3.8358	輪入道
18	1.4557	ACE	43	−3.9832	PONY
19	1.3886	CIMA	44	−4.4978	HELL BELL
20	1.1139	DragonOne	45	−4.8358	Kiss Shot
21	1.0608	黒ぶち	46	−4.8358	HIDE
22	0.7467	NONKEY	47	−4.8358	MEGA-G
23	0.6047	D.D.S	48	−4.8358	YZERR
24	0.5022	サ上	49	−5.8358	旬潤
25	0.3765	ニガリ	50	−5.8358	TARO

5.2 Colley の手法

表 4: Colley の手法

1	0.9285	龍道	26	0.4777	ACE
2	0.9112	R 指定	27	0.4704	ENEMY
3	0.908	崇勲	28	0.4613	サ上
4	0.8731	スナフキン	29	0.4459	ニガリ
5	0.8668	般若	30	0.4069	Lick-G
6	0.7788	KOPERU	31	0.4003	ANSWER
7	0.7643	焚巻	32	0.3627	REIDAM
8	0.7376	押忍マン	33	0.3335	旬潤
9	0.7126	Mr.Q	34	0.3335	TARO
10	0.7039	GASHIMA	35	0.3324	田中
11	0.7029	HIDADDY	36	0.3204	HELL BELL
12	0.6877	GADORO	37	0.294	RACK
13	0.6824	NONKEY	38	0.294	Mr.smile
14	0.6647	DOTAMA	39	0.294	KUREI
15	0.657	CIMA	40	0.2623	PONY
16	0.6514	黒ぶち	41	0.2502	Kiss Shot
17	0.5881	T-PabLow	42	0.2502	HIDE
18	0.58	DragonOne	43	0.2502	輪入道
19	0.5684	CHICO	44	0.2502	MEGA-G
20	0.5616	掌幻	45	0.2502	YZERR
21	0.5492	D.D.S	46	0.2502	RYOTA
22	0.5295	SALVA	47	0.2306	BALA
23	0.5099	USU	48	0.2306	GOMESS
24	0.5005	漢	49	0.2306	はなび
25	0.4806	LEON	50	0.2188	黄猿

5.3 Colley 化 Massey の手法

表 5: Colley 化 Massey の手法

1	3.6995	般若	26	−0.193	漢
2	3.1406	R 指定	27	−0.2178	D.D.S
3	2.8179	崇勲	28	−0.4655	ニガリ
4	2.4598	焚巻	29	−0.5746	LEON
5	2.4415	スナフキン	30	−0.6198	ENEMY
6	2.203	龍道	31	−0.9703	Lick-G
7	2.08	Mr.Q	32	−1.0746	GOMESS
8	2.0101	HIDADDY	33	−1.0965	RYOTA
9	1.9397	押忍マン	34	−1.1556	RACK
10	1.8944	KOPERU	35	−1.1556	Mr.smile
11	1.8001	GADORO	36	−1.1556	KUREI
12	1.3203	GASHIMA	37	−1.3638	田中
13	1.2724	DOTAMA	38	−1.4371	REIDAM
14	1.1732	掌幻	39	−1.5746	BALA
15	0.7194	CIMA	40	−1.5746	はなび
16	0.6888	T-PABLOW	41	−1.5965	輪入道
17	0.5829	黒ぶち	42	−1.614	黄猿
18	0.4692	CHICO	43	−1.7164	HELL BELL
19	0.44	USU	44	−1.731	句潤
20	0.3509	NONKEY	45	−1.731	TARO
21	0.2757	DragonOne	46	−2.0965	Kiss Shot
22	0.2222	ACE	47	−2.0965	HIDE
23	0.0842	ANSWER	48	−2.0965	MEGA-G
24	−0.1492	サ上	49	−2.0965	YZERR
25	−0.168	SALVA	50	−2.3651	PONY

表 6: 最終結果

1	3.2548	般若	27	−0.1772	D.D.S
2	3.1298	R 指定	28	−0.197	ANSWER
3	2.444	崇勲	29	−0.3849	ニガリ
4	2.1645	スナフキン	30	−0.3864	LEON
5	2.1349	KOPERU	31	−0.4939	ENEMY
6	2.0805	龍道	32	−0.7356	CHICO(M)
7	2.0148	焚巻	33	−0.9528	GOMESS
8	1.8356	押忍マン	34	−1.0021	RACK
9	1.7865	Mr.Q	35	−1.0262	RYOTA
10	1.6998	HIDADDY	36	−1.0583	Lick-G
11	1.6666	CHICO(T)	37	−1.0837	Mr.smile
12	1.4893	GADORO	38	−1.1433	HELL BELL
13	1.4215	DOTAMA(T)	39	−1.1532	KUREI
14	0.9216	掌幻	40	−1.2737	BALA
15	0.8018	GASHIMA	41	−1.4184	輪入道
16	0.77	CIMA	42	−1.4916	Kiss Shot
17	0.6776	T-PabLow	43	−1.5504	REIDAM
18	0.6443	黒ぶち	44	−1.568	HIDE
19	0.592	DOTAMA(M)	45	−1.571	はなび
20	0.4267	NONKEY	46	−1.6779	句潤
21	0.2162	DragonOne	47	−1.7316	TARO
22	0.0505	USU	48	−1.7432	田中
23	−0.0272	漢	49	−1.893	黄猿
24	−0.0884	サ上	50	−1.8939	MEGA-G
25	−0.1061	SALVA	51	−1.9386	YZERR
26	−0.1117	ACE	52	−2.3438	PONY

参考文献

[1] Amy N. Langville, Carl D. Meyer (訳) 岩野和生, 中村英史, 清水咲里, レイティング・ランキングの数理, 2015, 共立出版