トポロジー

芝浦工業大学　数理科学研究会

～芝浦祭研究発表～

平成 28 年 11 月 4 日

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

BV14018 長田 祐輝

目 次

1　研究動機

3 年前期の授業で幾何学 III という授業があり, そこで図形の単体分割というものを学んだ. しかしそのときはなぜそのような計算をするのか, その計算が何に役立つのか, なんの目的があってそのような計算をするのか, などの疑問を抱いていた. そこで今回私はそのような疑問を解決するために今回の研究テーマであるトポロジーを選んだ.

2　トポロジーとは何か

トポロジーとは図形に連続的な変形を施しても不変に保たれる性質を調べる学問である.

3　単体 · 面 · 複体

定義 3.1. **(単体)**　$a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$, $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$ は $r-1$ 次元以下の部分空間に属さないとする. つまり例えば $r = 2$ のとき $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ は同一直線上にはないということ. このとき

$$\left\{ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i a_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, r \right\}$$

を $a_0, a_1, \ldots, a_r$ によって生成される r **次元単体**といい, $\Delta^r = |a_0 a_1 \cdots a_r|$ で表す.

例 3.1.　0 次元単体は点, 1 次元単体は線分, 2 次元単体は三角形, 3 次元単体は四面体である.

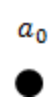

図 1: 0 次元単体

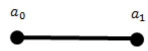

図 2: 1 次元単体

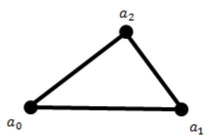

図 3: 2 次元単体

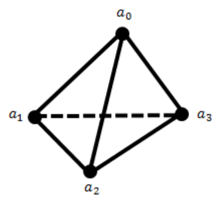

図 4: 3 次元単体

定義 3.2. **(面)**　r 次元単体 $\Delta^r = |a_0 a_1 \cdots a_r|$ に対して, $a_0, a_1, \ldots, a_r$ から任意の $s+1$ 個の点を選んだとき, この $s+1$ 個の点によって生成される単体を Δ^r の**面**といい, s をこの面の次元という.

例 3.2.　例えば $r = 3$ のとき $\Delta^3 = |a_0 a_1 a_2 a_3|$ に対して, a_0, a_1, a_2, a_3 から 3 個の点 a_0, a_1, a_2 をとると, この点によって生成される単体は 2 次元単体すなわち三角形になる. この 3 つの点 a_0, a_1, a_2 によって生成される 2 次元単体 $|a_0 a_1 a_2|$ が, Δ^3 の 1 つ面である.

定義 3.3. **(複体)**　K を有限個の単体の集合とする. K が次の条件 (i), (ii) を満たすとき K を**複体**という.

(i) $\Delta^r \in K$ ならば Δ^r の全ての面 Δ^s も K に属す.

(ii) $\Delta_1, \Delta_2 \in K$ ならば $\Delta_1 \cap \Delta_2$ は Δ_1 と Δ_2 の共通の面であるか, あるいは空集合である.

例 3.3. (複体の例) 点 a_1, a_2, a_3, a_4 が以下のように配置されたとき,

$$K = \{|a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|, |a_1a_2|, |a_2a_3|, |a_3a_1|, |a_1a_4|, |a_4a_3|\}$$

は複体である.

例 3.4. (複体でない例) 点 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ が以下のように配置されたとき,

$$K = \{|a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|, |a_5|, |a_6|, |a_1a_2|, |a_2a_3|, |a_3a_1|, |a_4a_5|, |a_5a_6|, |a_6a_4|\}$$

は複体でない. また, $K = \{|a_1a_2|, |a_2a_3|, |a_3a_1|\}$ のとき K は複体でない.

4 有向単体 · 鎖群

定義 4.1. (有向単体) 単体に向きを付けたもの.

定義 4.2. (鎖群) K を n 次元複体とし, K に含まれる r 次元単体を $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \cdots, \sigma_m^r$ とする. 各 σ_i^r に対してその向きを固定し, その向きをもった有向単体を $\langle\sigma_i^r\rangle$ とおく. そして, それらの整数係数つきの和

$$c = \alpha_1\langle\sigma_1^r\rangle + \alpha_2\langle\sigma_2^r\rangle + \cdots + \alpha_m\langle\sigma_m^r\rangle,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Z}$$

を r **次元鎖**という. r 次元鎖の全体がなす集合を $C_r(K)$ で表す. $C_r(K)$ は群になる. この群を, 複体 K の r **次元鎖群**という.

例 4.1. 5 本の線分 (1 次元単体) およびそのすべての端点からなる複体を K とする. すなわち,

$$K = \{|a_1a_2|, |a_2a_3|, |a_3a_4|, |a_1a_4|, |a_2a_4|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|\}$$

である. 1 次元単体に向きを決める.

$$\langle a_1a_2\rangle, \langle a_2a_3\rangle, \langle a_1a_4\rangle, \langle a_4a_2\rangle, \langle a_3a_4\rangle$$

これらに整数係数をかけて和をとったもの全体が, 1 次元鎖群 $C_1(K)$ である.

定義 4.3. (境界写像) r 次元有向単体 $\langle\sigma^r\rangle = \langle a_0a_1\cdots a_r\rangle$ に対して, 写像 $\partial_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K)$ を

$$\partial_r(\langle\sigma^r\rangle) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\langle a_0a_1\cdots a_{i-1}\hat{a}_ia_{i+1}\cdots a_r\rangle$$

と定義する (但し, $\hat{a}_i$ は a_i を除くことを意味する). 一般の鎖群の元 $c = \alpha_1\langle\sigma_1^r\rangle + \alpha_2\langle\sigma_2^r\rangle + \cdots + \alpha_m\langle\sigma_m^r\rangle$ に対しては次のように定義する:

$$\partial_r(c) = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\partial_r(\langle\sigma_k^r\rangle).$$

定義 4.4. 境界写像 $\partial_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K)$ に対して,

$$Z_r(K) = \mathrm{Ker}(\partial_r) = \{c \in C_r(K) \mid \partial_r(c) = 0\}$$

と定義する. また,

$$B_r(K) = \mathrm{Im}(\partial_{r+1}) = \{c \in C_r(K) \mid c = \partial_{r+1}(c') \text{ となる } c' \in C_{r+1}(K) \text{ が存在する }\}$$

と定義する. $Z_r(K)$ と $B_r(K)$ は可換群になる.

定理 4.5.　$\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$ となる. すなわち, $B_r(K) \subset Z_r(K)$ となる.

剰余群について
G を群, H を G の部分群とする. 以下の条件を満たすとき H を G の正規部分群という:

$$^\forall x \in G,\ x^{-1}Hx = H.$$

G を群, H を G の正規部分群とする. このとき $a, b \in G$ に対して, $a^{-1}b \in H$ ならば, $a \sim b$ とかく. 関係 $\sim$ は同値関係になる. $a \in G$ と同値関係 $\sim$ を満たすもの全体を集めて作った集合は

$$\{x \in G \mid x \sim a\} = \{x \in G \mid x^{-1}a \in H\} = \{x \in G \mid a^{-1}x \in H\} = \{x \in G \mid x \in aH\} = aH.$$

同値類全体の集合を G/H で表す. すなわち,

$$G/H = \{xH \mid x \in G\}$$

となる. この同値類全体の集合 G/H を利用してホモロジー群の定義をする.

定義 4.6. (ホモロジー群)　定義 4.4 と定理 4.5 により, $B_r(K)$ は $Z_r(K)$ の正規部分群になる. そこで上の話から, $Z_r(K)/B_r(K)$ を定義することが出来る. これを r 次元ホモロジー群といい, $H_r(K)$ で表す.

例 4.2. (トーラス)

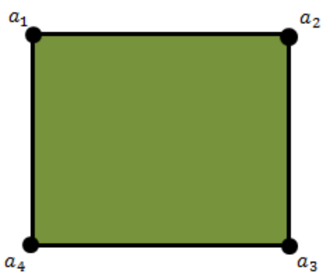

図 5: 長方形

図 6: 円柱

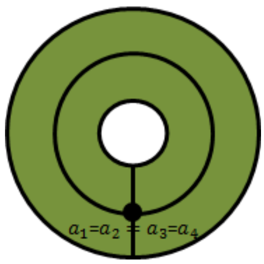

図 7: トーラス

トーラスは上の図のように構成できる. すなわち図 5 から図 6 の操作で辺 $|a_1a_2|$ と辺 $|a_4a_3|$ くっつけ, 図 6 から図 7 の操作で辺 $|a_1a_4|$ と辺 $|a_2a_3|$ をくっつけることにより得られる. よって, トーラスは 2 つの 3 角形と 3 本の線分と 1 つの点からなる複体 K で表せる. すなわち

$$K = \{|a_1| = |a_2| = |a_3| = |a_4|,\ |a_1a_2| = |a_4a_3|,\ |a_1a_4| = |a_2a_3|,\ |a_2a_4|,\ |a_1a_2a_4|,\ |a_2a_3a_4|\}$$

” = ” がついているのは辺や点を同一視することを意味する. すなわち上の図のようにくつける辺や頂点は同一視する. よって, 各単体に向きを以下のようにつける:

$$\langle a_1\rangle = \langle a_2\rangle = \langle a_3\rangle = \langle a_4\rangle,\ \langle a_1a_2\rangle = \langle a_4a_3\rangle,\ \langle a_1a_4\rangle = \langle a_2a_3\rangle,\ \langle a_2a_4\rangle,\ \langle a_1a_2a_4\rangle,\ \langle a_2a_3a_4\rangle.$$

ここで上の ” = ” は, $\langle a_1\rangle$, $\langle a_2\rangle$, $\langle a_3\rangle$, $\langle a_4\rangle$ を同一視し, $\langle a_1a_4\rangle$, $\langle a_2a_3\rangle$ を同一視し, $\langle a_1a_2\rangle$, $\langle a_4a_3\rangle$ を同一視することを意味する. ここで例えば, $\langle a_1a_2\rangle = -\langle a_2a_1\rangle$ などの関係が成り立つことに注意する. よって, 0 次元鎖群は $C_0(K) = \{\alpha_1\langle a_1\rangle \mid \alpha_1 \in \mathbb{Z}\}$, 1 次元鎖群は $C_1(K) = \{\alpha_1\langle a_1a_2\rangle + \alpha_2\langle a_1a_4\rangle + \alpha_3\langle a_2a_4\rangle \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}\}$, 2 次元鎖群は $C_2(K) = \{\alpha_1\langle a_1a_2a_4\rangle + \alpha_2\langle a_2a_3a_4\rangle \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}\}$ となる.
ここで, 境界写像 $\partial_1 : C_1(K) \to C_0(K)$ を,

$$\partial_1(\langle a_1a_2\rangle) = \langle a_2\rangle - \langle a_1\rangle = 0,\ \partial_1(\langle a_1a_4\rangle) = \langle a_4\rangle - \langle a_1\rangle = 0,\ \partial_1(\langle a_2a_4\rangle) = \langle a_4\rangle - \langle a_2\rangle = 0$$

と定義し, $\partial_2 : C_2(K) \to C_1(K)$ を,

$$\partial_2(\langle a_1a_2a_4\rangle) = \langle a_2a_4\rangle - \langle a_1a_4\rangle + \langle a_1a_2\rangle = \langle a_1a_2\rangle - \langle a_1a_4\rangle + \langle a_2a_4\rangle,$$
$$\partial_2(\langle a_2a_3a_4\rangle) = \langle a_3a_4\rangle - \langle a_2a_4\rangle + \langle a_2a_3\rangle = -\langle a_1a_2\rangle + \langle a_1a_4\rangle - \langle a_2a_4\rangle$$

と定義する.
まず, $Z_0(K)$ を求める. $Z_0(K) = \mathrm{Ker}(\partial_0) = C_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である. 次に, $B_0(K)$ を求める. ∂_1 は 0 写像であるから, $B_0(K) = \mathrm{Im}(\partial_1) = \{0\}$. 同様に, $Z_1(K) = \mathrm{Ker}(\partial_1) = C_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 次に, $B_1(K)$ を求める. ∂_2 を表す行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるから, これをスミス標準形にすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって, $B_1(K) = \mathrm{Im}(\partial_2) \cong \mathbb{Z}$ となる. また, $Z_2(K) = \mathrm{Ker}(\partial_2) = \mathbb{Z}$ となる. また, ∂_3 は $C_3(K) = \{0\}$ であるから, $B_2(K) = \mathrm{Im}(\partial_3) = \{0\}$ となる.
以上より, 各次元のホモロジー群は以下のようになる:

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z},$$
$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$
$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) \cong \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}$$

となる. よって, 0 次元ベッチ数 $R_0(K) = 1$, 1 次元ベッチ数 $R_1(K) = 2$, 2 次元ベッチ数 $R_2(K) = 1$ となるから, オイラー数 $\chi(K)$ は,

$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^i R_i(K) = 1 - 2 + 1 = 0$$

となる.

注意 4.1. 例 4.2 では, ∂_2 を表す行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のスミス標準形の具体的な求め方は書かなかった. 具体的には以下のように計算する.
まず, 2 行目に 1 行目の 1 倍を加え, 3 行目に 1 行目の -1 倍を加えると $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる. さらに, 2 列目に 1 列目の 1 倍を加えると $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる. これが行列 A のスミス標準形である. ちなみに, $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる行列 $P,\ Q$ の求め方は以下の通りである.

まず左から掛ける行列 P は行基本変形に対応し, 右から掛ける行列 Q は列基本変形に対応することに注意する. 行列 A に対して 2 行目に 1 行目の 1 倍を加えたいとき, 行列 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を A の左から掛ける. この行列は単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, やりたい操作を施した行列である. さらに P_1A に対して 3 行目に 1 行目の -1 倍を加えるには $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を P_1A の左から掛ければよい. すると, $P_2P_1A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる. また, P_2P_1A の 2 列目に 1 列目の 1 倍を加えるには $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を P_2P_1A の右から掛ければよい. すると $P_2P_1AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

また, $\mathrm{Ker}(\partial_2)$, $\mathrm{Im}(\partial_2)$ の求め方は次の通りである.

$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(\partial_2)$ であるとは, $\boldsymbol{x} \in C_2(K)$ かつ $\partial_2(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ となることである. そもそも行列 A は写像 $\partial_2 : C_2(K) \to C_1(K)$ を基底 $\{\langle a_1a_2a_4\rangle, \langle a_2a_3a_4\rangle\}$, $\{\langle a_1a_2\rangle, \langle a_1a_4\rangle, \langle a_2a_4\rangle\}$ に関して行列表示したものである. よって, $\{\langle a_1a_2a_4\rangle, \langle a_2a_3a_4\rangle$ と $\{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ をこの順で同一視し, $\{\langle a_1a_2\rangle, \langle a_1a_4\rangle, \langle a_2a_4\rangle\}$ と $\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$ をこの順で同一視する. よって, $\mathrm{Ker}(\partial_2)$ は

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow PAQQ^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow Q^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = sQ\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

但し, s は任意の整数である. よって, $\mathrm{Ker}(\partial_2) = \langle\langle a_1a_2a_4\rangle + \langle a_2a_3a_4\rangle\rangle$. 一方, $\mathrm{Im}(\partial_2) = \{\partial_2(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in C_2(K)\}$ であるから,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}PAQQ^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

但し, $Q^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおいた. Q^{-1} は正則であるから, $Q^{-1} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $(x,y)^T \mapsto (x',y') = Q^{-1}(x,y)^T$ は全単射になる. よって, $\{(x',y') \mid (x',y')^T = Q^{-1}(x,y)^T,\ (x,y)^T \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}^2$. すなわち, $\mathrm{Im}(P^{-1}PAQQ^{-1}) = \mathrm{Im}(P^{-1}PAQ)$ である. ここで, $P = (P_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}$ で, $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる (P_1 は元々2 行目に 1 行目の 1 倍を加えるという行列だったのでその逆の操作は 2 行目に 1 行目の -1 倍を加えるという操作であることから直ちに逆行列 P_1^{-1}

が求まる. P_2^{-1} も同様). よって, $P^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

よって,

$$x'P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=x'\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

よって, $\mathrm{Im}(\partial_2)=\langle\langle a_1a_2\rangle+\langle a_1a_4\rangle-\langle a_2a_4\rangle\rangle$ となる. これは図形的には, 辺 $|a_1a_2|$, $|a_1a_4|$, $|a_2a_4|$ によって作られる輪っかを意味する.

注意 4.2. 本来, 行基本変形, および, 列基本変形には 0 でない定数倍をするという操作があるが今回は, 整数を係数に考えているので, 逆数が存在する ±1 によるスカラー倍のみを考える.

注意 4.3. ホモロジー群を計算するとき, 厳密には次のように計算する.

$$\begin{aligned}H_0(K)&=Z_0(K)/B_0(K)=\{z+B_0(K)\mid z\in Z_0(K)\}=\{z+\{0\}\mid z\in Z_0(K)\}\\&=\{\{z\}\mid z\in Z_0(K)\}\cong Z_0(K)\cong\mathbb{Z}\end{aligned}$$

次に, 1 次元ホモロジー群 $H_1(K)=Z_1(K)/B_1(K)$ を求める. $Z_1(K)$ の元を $B_1(K)$ の基底を使って表そうとすると,

$$\begin{aligned}&\alpha_1\langle a_1a_2\rangle+\alpha_2\langle a_1a_4\rangle+\alpha_3\langle a_2a_4\rangle\\=&\alpha_1(\langle a_1a_2\rangle-\langle a_1a_4\rangle+\langle a_2a_4\rangle)+\alpha_1\langle a_1a_4\rangle-\alpha_1\langle a_2a_4\rangle+\alpha_2\langle a_1a_4\rangle+\alpha_3\langle a_2a_4\rangle\\=&\alpha_1(\langle a_1a_2\rangle-\langle a_1a_4\rangle+\langle a_2a_4\rangle)+(\alpha_1+\alpha_2)\langle a_1a_4\rangle+(\alpha_3-\alpha_1)\langle a_2a_4\rangle\\=&\alpha_1(\langle a_1a_2\rangle-\langle a_1a_4\rangle+\langle a_2a_4\rangle)+m_1\langle a_1a_4\rangle+m_2\langle a_2a_4\rangle.\end{aligned}$$

但し, $m_1=\alpha_1+\alpha_2\in\mathbb{Z},\ m_2=\alpha_3-\alpha_1\in\mathbb{Z}$ とおいた. よって $H_1(K)$ の元は,

$$\begin{aligned}&B_1(K)+\alpha_1(\langle a_1a_2\rangle-\langle a_1a_4\rangle+\langle a_2a_4\rangle)+m_1\langle a_1a_4\rangle+m_2\langle a_2a_4\rangle\\=&B_1(K)+m_1\langle a_1a_4\rangle+m_2\langle a_2a_4\rangle.\end{aligned}$$

よって, $H_1(K)$ は,

$$\begin{aligned}H_1(K)=&\{B_1(K)+m_1\langle a_1a_4\rangle+m_2\langle a_2a_4\rangle\mid m_1,\ m_2\in\mathbb{Z}\}\\\cong&\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$H_2(K)=Z_2(K)/B_2(K)$ を求めると,

$$\begin{aligned}H_2(K)=&\{z+B_2(K)\mid z\in Z_2(K)\}=\{\{z\}\mid z\in Z_2(K)\}\\\cong&Z_2(K)\cong\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$i\neq0,1,2$ に対して, $H_i(K)$ を求めると,

$$H_i(K)=\{z+B_i(K)\mid z\in Z_i(K)\}=\{0+\{0\}\}\cong\{0\}.$$

5　今後の課題

前よりは輪体群や境界輪体群やホモロジー群が図形とどういう関係にあるのか分かって来たが, まだ完全には分かっていないので, そのあたりのことについてちゃんと理解したい.

参考文献

[1] 杉原厚吉, トポロジー, 朝倉書店, 2011.