素数定理

芝浦工業大学　数理科学研究会
石川直幹

平成 28 年 11 月 4 日

1　研究背景

素数が自然数列上でどのように分布しているかは, 紀元前から現代に至るまで脈々と研究されているにもかかわらず, 未だに完全把握 (n 番目の素数を出力する関数) は見つかっていない. しかし, 素数の分布に関する重要な手がかりがいくつか知られており, その中で最も有名とされている素数定理について, 学習したので, 今回はそれを発表する.

2　証明の流れ

今回は初等的に証明する. 具体的には, 関数 (主に整数論的) を必要なだけ定義し, Abel の変形法を使って必要な不等式を示し, Selberg の不等式によって, $|R(x)|$ を評価することで, 素数定理を証明する.

2.1　関数の導入

証明に必要な関数:

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1,$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & (n = p^a,\ a > 0) \\ 0 & (n \ne p^a,\ a > 0) \\ 0 & (n = 1) \end{cases},$$

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p \quad (x \ge 1),$$

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \quad (x \ge 1)$$

等を定義し, それぞれの関数の性質を調べる. そして,

$$c_1 \le \vartheta(x) \le c_2 \tag{1}$$

であることを示し, (1) を用いて,

$$\vartheta(x) \sim x \quad (x \to \infty) \tag{2}$$

を示す. (2) が素数定理が同値であることが特に重要である.

2.2　Abel の変形法

定理 2.1 (Abel の変形法)**.** $a_n (n \in \mathbb{N})$ は与えられた実数または複素数の列とし

$$A(t) = \sum_{n_0 \le n \le t} a_n \ (0 \le n_0,\ 0 < t)$$

とおき, $f(t)$ は $n_0 < t$ に対して定義された任意の関数とする. また, $f(t)$ が $n_0 < t$ において連続な導関数をもつならば

$$\sum_{n_0 \le n \le x} a_n f(n) = -\int_{n_0}^{x} A(t) f'(t)\ dt + A(x) f(x)$$

が成り立つ

Abel の変形法を用いていくつかの不等式を示される.

2.3　Selberg の不等式

Abel の変形法を用いて示した不等式を使って,

$$\theta_n := \sum_{d|n} \mu(d) \log^2 \frac{n}{d}$$

の和を二通りの方法で計算する. これにより, Selberg の不等式:

$$\vartheta(x) \log x + \sum_{p \le x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \log p = 2x \log x + O(x) \tag{3}$$

が証明される.

2.4　$|R(x)|$ の評価

Selberg の不等式を用いて,

$$R(x) := \vartheta(x) - x$$

の絶対値を評価する. そして, $|R(x)|$ の評価を厳しくしていくことで, (2) を証明する.

3　今後の課題

今後は, さらに精度がよく, 扱いやすい (計算しやすく, できれば微分可能な) 関数で $\pi(x)$ に近づいていく曲線を自分で見つけたい. 具体的には, Weierstrass の多項式近似定理や $\pi(x) \le cx/\log x$ などをもとに数式処理ソフト等で探したい.

参考文献

[1] 内山 三郎:素数の分布, 第 1 刷 1970 年, 宝文館出版

[2] 高木貞治:初等整数論講義,, 共立出版

[3] 素数定理の初等的証明 (予告編), 2016 年, `http://integers.hatenablog.com/entry/2016/03/03/000000`