オタクスパイラルの発見と定式化

～*Probability* Differential Equation～

芝浦工業大学　数理科学研究会

BV14045 長瀬准平

平成 28 年 11 月 4 日

1　研究背景

2016 年の大宮祭にて,「オタクはリアルへの関心を失っていき, そこから抜け出すことは難しいのでは」という仮説に基づき, そのような現象, すなわちオタクスパイラルについての考察を試みた. 本研究ではオタクスパイラルを研究するために構築したいくつかのモデルについて説明する.

2　準備

大宮祭ではアイテム (オタク) の挙動に関する漸化式を設定し, それを連続化することで微分方程式を考えた. それによって離散と連続の両面から考察したが, 今回微分方程式が存在すると仮定して, それを離散化した漸化式を考えることで問題を簡単にした. また, いくつか定義を改めたものもあるので紹介する. 詳しくは資料を参照されたい.

用語および関数の定義と説明

- アイテム $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$
- イベント $j \in J = \{1, 2, \cdots, M\}$
- $p_{(j)} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ (イベント j の確率)
- $\boldsymbol{f}_{(j)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (イベント j の影響)

ただし, t を時刻とし, $\displaystyle\sum_{j=0}^{M-1} p_{(j)}(\boldsymbol{x}) = 1$ を満たす.

また, イベント j の影響のみによるアイテムの微分方程式を

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_{(j)}(t) = \boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

と表す. ここでイベント j の影響のみで表されていることに注意したい. 今, 考えたいものは M 個のイベントの影響を受けた微分方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の解となる連続的な関数 $\boldsymbol{x}(t)$ ないし離散的な近似解である. 以降では (1) を元に変形させたいくつかのモデルについての結果を述べていく.

3　モデルの紹介

前節で準備した基本的な形 (1) を元にモデルを構築し, その数列の極限や微分方程式の解について研究する. 前回の研究成果については前資料 [1] を参照されたい. この節ではモデルの紹介と新たな結果について述べる. どちらのモデルも確率をただの重みとして扱っているので, ランダムな影響を持たない形にできている.

3.1　最尤モデル

数列 (1) の $\boldsymbol{f}_{(j)}$ を関数 $\mathfrak{F}$ で置き換える. $\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x}) = f_{(j)}(\boldsymbol{x})$ (ただし, この j は $\boldsymbol{x}$ について $p_{(j)}(\boldsymbol{x})$ が最も高くなる j) と定義する. すなわち,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \mathfrak{F}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

このモデルは一番確率が高いイベントを毎回選択するものとなっているので最尤モデルと呼ぶ. また, 一つのイベントの影響だけを受けた $\boldsymbol{x}$ ではないので, 添え字 (j) を外している.

ここで問題となるのは, $\mathfrak{F}$ を具体的に構成することができるか, ということである. このような $\mathfrak{F}$ が存在することは前研究でわかっていたが, より簡単にすることができた. イベント 1 から j までを考慮した $\mathfrak{F}$ を特に $\mathfrak{F}_{(j)}$ とおくと, j 番目までのイベントの中で j が起こる確率が一番高いときに 1, それ以外のときに 0 を返す関数 $P_{(j)}$ を用いて, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{(M)}$ は

$$\mathfrak{F}_{(M)} = P_{(M)}\boldsymbol{f}_{(M)} + (1 - P_{(M)})\mathfrak{F}_{(M-1)}$$

と表せる. したがって再帰的に $F_{(M)}$ を定めることができる. 加えて, 極限に関する公式 ([2] 参照)

$$\max(A, B, \cdots) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log\left(\mathrm{e}^{A/\varepsilon} + \mathrm{e}^{B/\varepsilon} + \cdots\right)$$

を用いることで, 近似的または連続的に $\mathfrak{F}$ を更に扱いやすい形に変形することができた.

3.2　期待値モデル

すべてのイベント結果 $(f_{(j)}(\boldsymbol{x}))$ をそれぞれの確率の重みで平均化したモデル (期待値モデル) を考える.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=0}^{M} p_{(j)}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}_{(j)}(\boldsymbol{x}_k) \tag{3}$$

今後の課題

イベントとその確率や影響を確率空間上で考えることで, 測度論および公理的確率論の結果を用いて議論を進める. また, 何か具体的な結果について適用することで従来の確率論から得られる結論と比較したい.

参考文献

[1] 長瀬准平, オタクスパイラルの発見と定式化, 大宮祭, 2016.

[2] 広田良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, 2003.

[3] 久保拓弥, データ解析のための統計モデリング入門, 2012