トポロジー

芝浦工業大学　数理科学研究会
長田祐輝

平成 28 年 11 月 4 日

1　研究動機

3 年前期の授業で幾何学 III という授業があり, そこで図形の単体分割というものを学んだ. しかしそのときはなぜそのような計算をするのか, その計算が何に役立つのか, なんの目的があってそのような計算をするのか, などの疑問を抱いていた. そこで今回私はそのような疑問を解決するために今回の研究テーマであるトポロジーを選んだ.

2　トポロジーとは何か

トポロジーとは図形に連続的な変形を施しても不変に保たれる性質を調べる学問である.

3　単体 · 面 · 複体

定義 3.1 (単体) 点を 0 次元単体, 線分を 1 次元単体, 三角形を 2 次元単体, 四面体を 3 次元単体という. それぞれ頂点を用いて, $|a_0|$, $|a_0a_1|$, $|a_0a_1a_2|$, $|a_0a_1a_2a_3|$ などとかく.

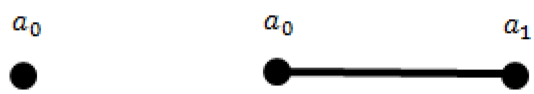

図 1: 単体の例 (左:0 次元, 右:1 次元)

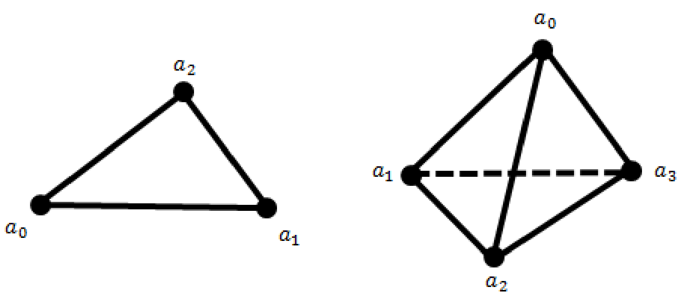

図 2: 単体の例 (左:2 次元, 右:3 次元)

定義 3.2 (面) 単体からいくつか頂点を選び, その頂点からなる単体を元の単体の面とよぶ.

定義 3.3 (複体) K を有限個の単体の集合とする. K が次の条件 (i), (ii) を満たすとき K を**複体**という.

(i) $\Delta^r \in K$ ならば Δ^r の全ての面 Δ^s も K に属す.

(ii) $\Delta_1,\ \Delta_2 \in K$ ならば $\Delta_1 \cap \Delta_2$ は Δ_1 と Δ_2 の共通の面であるか, あるいは空集合である.

4　その他の定義

定義 4.1 (有向単体) 単体に向きをつけたもの.

定義 4.2 (鎖群) K を n 次元複体とし, K に含まれる r 次元単体を $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \cdots, \sigma_m^r$ とする. 各 σ_i^r に対してその向きを固定し, その向きをもった有向単体を $\langle \sigma_i^r \rangle$ とおく. そして, それらの整数係数つきの和

$$c = \alpha_1 \langle \sigma_1^r \rangle + \alpha_2 \langle \sigma_2^r \rangle + \cdots + \alpha_m \langle \sigma_m^r \rangle,\ \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Z}$$

を r **次元鎖**という. r 次元鎖の全体がなす集合を $C_r(K)$ で表す. $C_r(K)$ は群になる. この群を, 複体 K の r **次元鎖群**という.

定義 4.3 (境界写像) r 次元有向単体 $\langle \sigma^r \rangle = \langle a_0 a_1 \cdots a_r \rangle$ に対して, 写像 $\partial_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K)$ を

$$\partial_r(\langle \sigma^r \rangle) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \langle a_0 a_1 \cdots a_{i-1} \hat{a}_i a_{i+1} \cdots a_r \rangle$$

と定義する (但し, $\hat{a}_i$ は a_i を除くことを意味する). 一般の鎖群の元はこれらの 1 次結合であるが, その場合には, 和を分けて, スカラー倍を前に出して, 上の定義に帰着させる.

定義 4.4 (輪体群 · 境界輪体群) 境界写像 $\partial_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K)$ に対して,

$$Z_r(K) = \mathrm{Ker}(\partial_r) = \{c \in C_r(K) \mid \partial_r(c) = 0\}$$

と定義し, $Z_r(K)$ を r **次元輪体群**という. また,

$$\begin{aligned} B_r(K) &= \mathrm{Im}(\partial_{r+1}) \\ &= \{c \in C_r(K) \mid c = \partial_{r+1}(c')\ \text{となる}\ c' \in C_{r+1}(K)\ \text{が存在する}\} \end{aligned}$$

と定義し, $B_r(K)$ を r **次元境界輪体群**という.

定義 4.5 (ホモロジー群) r 次元輪体群 $Z_r(K)$, r 次元境界輪体群 $B_r(K)$ に対して, r 次元ホモロジー群を次のように定義する :

$$H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K).$$

5　今後の課題

前よりは輪体群や境界輪体群やホモロジー群が図形とどういう関係にあるのか分かって来たが, まだ完全には分かっていないので, そのあたりのことについてちゃんと理解したい.

6　参考文献

[1] 杉原厚吉, トポロジー, 朝倉書店, 2011.