確率のパラドックス

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV16021 川上絢哉

平成 29 年 5 月 19 日

1　研究背景

さいころの特定の目が出る確率やコイントスで表が出る確率など一見確率というのは常に同じに見える. しかし問題の定義の仕方, 範囲などの違いによってパラドックスが起きているかのように見えることがある. 本研究ではどこにパラドックスが起きるポイントがあるのかを中心に具体例を用いて説明する.

2　ベルトランのパラドックス

「円に内接する正三角形を考えその円の弦を 1 本無作為に選んだ場合, その弦が正三角形の辺よりも長くなる確率はいくつか」

2.1　正三角形の一辺の長さ

最初に円の半径を r とすると内接する三角形の一辺の長さは三角比より $rcos\frac{\pi}{3} \times 2 = \sqrt{3}r$ となる.

2.2　解答の分岐

2.2.1　最初に端点を選ぶ方式

円周上の 2 点を無作為に選び, それらを結ぶ弦を考える. 問題の確率を計算するために, 正三角形を回転させ,1 つの頂点が選ばれた点の 1 つに一致するようにする. もしもう一方の端点が, 正三角形の他の 2 頂点を結んだ弧の上にあれば, 弦は正三角形の 1 辺よりも長いことが分かる. このとき解答は $\frac{1}{3}$ となる.

2.2.2　最初に半径を選ぶ方式

円の半径を 1 本無作為に選び, さらにその上の 1 点を無作為に選んで, 選ばれた点を通り選ばれた半径に垂直な弦を考える. 問題の確率を計算するために, 正三角形を回転させ,1 辺が半径に垂直になるようにする. 選ばれた点が, 辺と半径との交点より中心に近ければ, 弦は 1 辺より長い. このとき解答は $\frac{1}{2}$ となる.

2.2.3　最初に中点を選ぶ方式

円の内部の点を無作為に選び, それが中点となるような弦を考える. もし選ばれた点が, 与えられた円と中心が同じで, 半径がその 2 分の 1 である円の内側にあれば, 弦は正三角形の 1 辺より長い. このとき解答は $\frac{1}{4}$ となる.

3　モンティホール問題

挑戦はドアを一つ選んだあと司会者のモンティは挑戦者の選んだドア以外の外れ (ヤギ) のいるドアを一つ開ける. そこでモンティは挑戦者に「選んだドアを変えてもよい」と声をかける. 変えるほうがよいか?
A,B,C をドアの後ろに自動車があるという事象とする.　自動車は一つなので $A \vee B \vee C$ であることに注意する.　この時 $P(A)$=$P(B)$=$P(C)$=$\frac{1}{3}$ になる. 仮に挑戦者がドア A を選び司会者はドア B を選びヤギを見せた事象を G とするとドアを変えずに自転車が当たる確率は $P(A|G)$ であり変えてドア C を選んだ時に当たる確率は $P(C|G)$ となる. この時 $P(A|G)$=$\frac{1}{3}$,$P(C|G)$=$\frac{2}{3}$ となるが, 一見すると $P(A)$=$P(C|G)$=$\frac{1}{3}$ に見える.

4　サンクトペテルブルグのパラドックス

裏表がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを表が出るまで投げ続け, 表が出たときに, 賞金をもらえるゲームがあり, 賞金は 1 回目で表が出た場合 1 円,2 回目で表が出た場合 1 円の 2 倍である 2 円,3 回目で表が出た場合 2 円の 2 倍の 8 円と倍々に賞金が増えていくとする. このとき参加費用がいくらなら参加すべきか?

このとき n 回目の賞金は $1 \times 2^{n-1}$ となるので期待値を M とすると

$$M = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k} \cdot 2^{k-1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty$$

となり期待値を見る上では参加費用がどれだけ高くとも参加すべきと見えてしまう.

5　今後の課題

今回は確率の古典的解釈によるパラドックスの発生の調査のみで終了してしまった. 今後は頻度主義, ベイズ確率などを調べパラドックスの解決を計りたい。

参考文献

[1] 学チュートリアル　やさしく語る確率統計　西岡康夫 オーム社

[2] 義:確率統計 穴太克則 学術図書出版社

[3] 確率論史』改訂版 アイザック・トドハンター著、安藤洋美訳 現代数学社