だまし絵の数理

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV16042 高橋彰大

平成 29 年 5 月 21 日

1　研究背景

以前, だまし絵で有名なエッシャーの「上昇と下降」などを見たことがあり, だまし絵というものに興味をもった. ちょうど, だまし絵について数学的に説明している本があったので, それについて勉強してみることにした.

2　研究方針

図 1 のように平面上に線分だけを使って描かれた絵を以下では**線画**とよぶ. の今回はこの, 立体化が不可能にみえる線画「だまし絵」が本当に立体化できないのかについて線形代数を用いて考えていく. 議論するにあたり以下の仮定をおく.

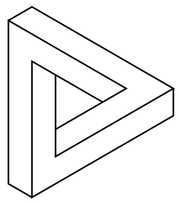

図 1　ペンローズの三角形

仮定 1　対象とする 3 次元物体は, 厚みのある多面体である.

仮定 2　立体の各頂点は, 3 個の面に接続している頂点 (**三面頂点**) である.

仮定 3　視点は一般の位置にある.

仮定 4　立体は不透明な物質でできている. 線画には, 立体の見えている稜線のみが描かれる.

仮定 5　線画には, 立体の全体像が描かれている.

3　頂点辞書による立体候補

平面上の線画を立体として認識できるための条件を考える. まず, 線画の中の線分は凸線, 凹線, 輪郭線の 3 種類に分類でき, これらをそれぞれ $+, -, >$ でラベル付けをする. 各頂点でのラベルの組み合わせは図 2 の 16 通りのみである. これを**頂点辞書**と呼び, これらにより立体候補が得られる.

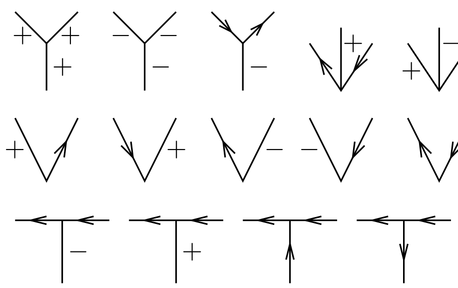

図 2　三面頂点に対する頂点辞書

4　立体の実現可能性

4.1　立体復元方程式

線画に表される立体の第 i 頂点の座標を (x_i, y_i, z_i) とし, 第 j 面の載っている平面の方程式を

$$a_j x + b_j y + z + c_j = 0$$

とおく. 第 i 頂点が第 j 面に載っているときには, その頂点座標を平面方程式に代入したものが成り立つので

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0$$

が成り立つ. 線画が与えられたとき x_i, y_i は既知だから, この式は未知数 z_i, a_i, b_i, c_i に関して線形である. このような式をすべて集めたものを

$$Aw = \mathbf{0} \tag{1}$$

とおく. ただし, A は定数行列, w は未知数ベクトル $w = (z_1, \cdots, z_n, a_1, b_1, c_1, \cdots, a_m, b_m, c_m)^T$ である (n は頂点数, m は面体を表す).

4.2　遠近不等式

線画の中には, 立体のある部分がほかの部分より手前にあるか奥にあるかという手がかりもある.

このことは不等式

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j > 0$$

で表される. このような不等式をすべて集めたものを

$$Bw > \mathbf{0} \tag{2}$$

とおく.

4.3　線形計画問題への帰着

線画が正しいものであり立体化できるかどうかは, (1), (2) の充足可能性を判定する問題に帰着でき, これらは線形計画問題の標準手法により解くことができる.

5　今後の課題

次回は実際に線画から数値データをとり, 線形計画問題を解き, それに基づいた立体の制作を行いたいと思う.

参考文献

[1] 杉原厚吉 著, だまし絵と線形代数, 共立出版, 2012.