駅の改札のより良い配置についての提案

BV16059　西村健志

平成 29 年 11 月 3 日

※計算ミスや誤字等がありましたら加筆修正しますのでご指摘をお願いいたします.

目 次

研究背景

芝浦工業大学大宮キャンパスの最寄駅である東大宮駅は朝の通学時間帯は大変混雑していて, 改札を出るのに時間がかかる. しかし, 待ち行列理論を使って駅の改札の配置を変えることで, 混雑が多少緩和されるのではないかと思い, この研究をすることにした.

1　待ち行列について

1.1　待ち行列とは何か

私たちの日常生活の中で行列に並んで待つことは極めて多い. 銀行, 郵便局, 駅, 食堂などで行列を作って順番を待ち, サービスを受けて退場するという現象は数多く存在する. このときにできる行列は全て**待ち行列**である. このような待たせることが生じる原因は, 各種のサービス設備の数がサービスを必要とする人あるいは物の数に比べて不足しているからである. しかし, むやみにサービス設備の数を増やすのは, 不経済を招くことにつながる. そこで, サービスを受ける人あるいは物と, サービス設備の間に最適の数量的関係を見出そうという考えから出発したのが**待ち行列理論**である.

1.2　待ち行列に必要な要素

- **客**：サービスを受けるために到着する人, 物, 情報.
- **到着の仕方**：定間隔到着 or ランダム到着.
  定間隔到着の場合は, 到着が予想されるので対策もとりやすく, 待ち行列理論の対象にするまでもない. ランダム到着はやっかいであるが, その到着の仕方を確率分布で表すと, 待ち行列理論の対象の典型となる. さらに, ランダムということをつきつめると, その到着状況はポアソン分布に従う. また, 到着間隔に注目すれば指数分布に従っていることも分かる.
- **平均到着率** λ：単位時間あたりに到着するお客さんの人数.
- **窓口の数**
- **窓口のサービスの質**：複数の窓口がある場合, 窓口によって行われるサービスが異なることもある.
- **平均サービス率** μ：単位時間に何人サービスするか.
  μ の逆数 $(\frac{1}{\mu})$ は平均サービス時間を表す.
- **サービスの順番**：通常は先着順とする.
- **待合室の大きさ**：町の個人病院などでは, 待合室が小さいのでそこが満員になると, 後から来たお客さんがあきらめて帰ってしまうことがあるので, 待合室の大きさは重要である. しかし, 今回のモデルでは使用しない.

1.3　ケンドール記号

待ち行列のモデルを作るには, 1.2 で挙げたようにいろいろな要素を考える必要がある. そこで, そのモデルがどんなモデルであるのかを簡単に表すためにケンドール記号という記号を用いて次のように表す.

$$\boxed{\text{到着/サービス/窓口数 (系の大きさ)}}$$

到着とサービスは次の記号で表す.

$$\begin{cases} M : \text{ポアソン分布または指数分布に従う} \\ D : \text{一定分布に従う} \\ Ek : \text{アーラン分布に従う} \\ G : \text{一般分布に従う} \end{cases}$$

系の大きさ：待ち行列に並んでいる人数と, サービス中の人数の合計.

1.4 確率変数と確率分布

1.3 で挙げた 5 つの確率分布 (ポアソン分布など) がどのようなものなのかを簡単に紹介する.

定義 1.1（確率変数, 確率分布）

1. 事象に対して定まる変数 (X) で, その事象が起こる確率 ($P(X)$) が定まっているもの (X のこと) を**確率変数**という.
2. 確率変数を定める法則 (規則) を**確率分布** (または単に分布) という.

定義 1.2（離散型確率変数, 確率質量関数） サイコロ投げやコイン投げのように確率変数 X が離散の値をとるとき, **離散型確率変数**という. 離散型確率変数 X が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値をとるときに, 特に

$$P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

を**確率質量関数** (確率関数, 質量関数ともいう) という.

定義 1.3（連続型確率変数, 確率密度関数） 分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ が, ある非負関数 f により

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

と書けるとき, X を連続型確率変数, f を X の確率密度関数, または, 単に**密度関数**という.

- ポアソン分布
  λ を正の整数とする. 確率変数 X の確率質量関数が
  $$p_r = P(X = r) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^r}{r!},\ r = 0, 1, 2, \cdots,$$
  であるとき, X はパラメータ λ の**ポアソン分布**に従うといい, $X \sim P_0(\lambda)$ と書く.

- 指数分布
  正の定数 λ に対して, 確率変数 X の密度関数が
  $$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0,\ f(x) = 0,\ x < 0,$$
  であるとき, X はパラメータ λ の**指数分布**に従うといい, $X \sim \exp(\lambda)$ と書く.

- 一定分布
  常に一定の値となる分布を**一定分布**という.

- アーラン分布
  密度関数が次の形：
  $$f_k(x) = \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-k\lambda x}$$
  を持つとき, その分布を**アーラン分布**という. 但し, k は位相.

- 一般分布
  その分布の平均値と分散が分かっていれば, 待ち行列の長さが計算できる. 分布の形が分かる必要はない.

1.5 求めるべき解

次の 4 つの解を求めることを目標とする.

待たされる確率 (Pq), 系内にいる平均客数 (L), 待ち行列の平均の長さ (Lq), 平均待ち時間 (Wq)

1.6 $M/M/1$ モデルについて

1.6.1 $M/M/1$ モデルの解の公式

1. 待たされる確率 $Pq = \rho$
2. 系内にいる平均客数 $L = \dfrac{\rho}{1-\rho}$
3. 待ち行列の平均の長さ $Lq = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$
4. 平均待ち時間 $Wq = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$

1.6.2 1.6.1 の公式の導出 ステップ 1

ある時点 t を出発点とする.
t からわずかな時間 Δt(ただし, $\Delta t \neq 0$) を経過した後, つまり, 時点 $t+\Delta t$ でどんなことが起こり得るかを考える. ただし, Δt は十分に小さな時間であるから, この間にお客さんが 2 人来ることや, サービスが 2 人以上完了すること, あるいは到着とサービス完了が同時に起こることはないとする. また, 時点 $t+\Delta t$ において, 系の中にお客さんが n 人いる確率を P_n と表すことにする. Δt は十分に小さな時間であるから, この間には,

1. お客さんが 1 人来る
2. お客さんが 1 人も来ない

のどちらかである. 1. の確率は $\lambda\Delta t$, 2. の確率は $1-\lambda\Delta t$ である.

(1) お客さんが 1 人もいない確率
時点 $t+\Delta t$ にお客さんが 1 人もいない確率 P_0 を考える. この場合は, 次の 2 通りが考えられる.

(a) 時点 t にお客さんが 1 人もいなくて (その確率は P_0) かつ 1 人の到着もない (その確率は $1-\lambda\Delta t$) 場合
この確率は, $(1-\lambda\Delta t)P_0$.

(b) 時点 t にお客さんが 1 人いて (その確率は P_1) かつ Δt の間に 1 人のサービスが完了する (その確率は $\mu\Delta t$) 場合
この確率は, $\mu\Delta t P_1$.

この 2 つのどちらかが起こるので,

$$\begin{aligned} P_0 &= (1-\lambda\Delta t)P_0 + \mu\Delta t P_1 \\ &= P_0 - \lambda\Delta t P_0 + \mu\Delta t P_1 \end{aligned}$$

よって,

$$\lambda\Delta t P_0 = \mu\Delta t P_1$$

であるから, P_0 と P_1 の関係は次のようになる.

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0 \tag{1.1}$$

(2) お客さんが 1 人いる確率
時点 $t+\Delta t$ にお客さんが 1 人いる確率 P_1 を考える．この場合は, 次の 3 通りが考えられる．

(a) 時点 t にお客さんが 1 人もいなくて (その確率は P_0) かつ到着が 1 人あった (その確率は $\lambda\Delta t$) 場合
この確率は, $\lambda\Delta tP_0$.

(b) 時点 t にお客さんが 1 人いて (その確率は P_1) かつ到着もサービス完了もなかった (その確率は $1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t$) 場合
この確率は, $(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)P_1$.

(c) 時点 t にお客さんが 2 人いて (その確率は P_2) かつサービス完了が 1 人あった (その確率は $\mu\Delta t$) 場合
この確率は, $\mu\Delta tP_2$.

この 3 つのいずれかが起こるので,

$$\begin{aligned}P_1 &= \lambda\Delta tP_0+(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)P_1+\mu\Delta tP_2\\ &= \lambda\Delta tP_0+P_1-\lambda\Delta tP_1-\mu\Delta tP_1+\mu\Delta tP_2\end{aligned}$$

よって,

$$\mu\Delta tP_2=\lambda\Delta tP_1+\mu\Delta tP_1-\lambda\Delta tP_0.$$

ゆえに, $\Delta t\neq 0$ であるから,

$$\mu P_2=\lambda P_1+\mu P_1-\lambda P_0=(\lambda+\mu)P_1-\lambda P_0.$$

ここに, 式 (1.1) を代入すると,

$$\mu P_2=(\lambda+\mu)\cdot\frac{\lambda}{\mu}P_0-\lambda P_0=\frac{\lambda^2+\lambda\mu-\lambda\mu}{\mu}P_0.$$

であるから, P_0 と P_2 の関係は次のようになる．

$$P_2=\frac{\lambda^2}{\mu^2}P_0$$

(3) お客さんが n 人いる確率
最後に時点 $t+\Delta t$ にお客さんが n 人いる確率 P_n を考える．この場合は, 次の 3 通りが考えられる．

(a) 時点 t にお客さんが $(n-1)$ 人いて (その確率は P_{n-1}) かつ到着が 1 人あった (その確率は $\lambda\Delta t$) 場合
この確率は, $\lambda\Delta tP_{n-1}$.

(b) 時点 t にお客さんが n 人いて (その確率は P_n) かつ到着もサービス完了もなかった (その確率は $1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t$) 場合
この確率は, $(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)P_n$.

(c) 時点 t にお客さんが $(n+1)$ 人いて (その確率は P_{n+1}) かつサービス完了が 1 人あった (その確率は $\mu\Delta t$) 場合
この確率は, $\mu\Delta tP_{n+1}$.

この 3 つのいずれかが起こるので,

$$\begin{aligned}P_n &= \lambda\Delta tP_{n-1}+(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)P_n+\mu\Delta tP_{n+1}\\ &= \lambda\Delta tP_{n-1}+P_n-\lambda\Delta tP_n-\mu\Delta tP_n+\mu\Delta tP_{n+1}\end{aligned}$$

よって,

$$\mu\Delta t P_{n+1} = \lambda\Delta t P_n + \mu\Delta t P_n - \lambda\Delta t P_{n-1}.$$

ゆえに, $\Delta t \neq 0$ であるから,

$$\mu P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n - \lambda P_{n-1} = (\lambda+\mu)P_n - \lambda P_{n-1}.$$

よって,

$$\mu P_{n+1} - (\lambda+\mu)P_n + \lambda P_{n-1} = 0.$$

隣接 3 項間漸化式の公式を用いて上の式を変形すると

$$P_{n+1} - P_n = \frac{\lambda}{\mu}(P_n - P_{n-1}) = \rho(P_n - P_{n-1}) \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \rho \text{ とおく}$$

この式は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つので, 上式で n の値を一つずつ減らしていくと, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} P_n - P_{n-1} &= \rho(P_{n-1} - P_{n-2}) \\ P_{n-1} - P_{n-2} &= \rho(P_{n-2} - P_{n-3}) \\ P_{n-2} - P_{n-3} &= \rho(P_{n-3} - P_{n-4}) \\ &\vdots \\ P_3 - P_2 &= \rho(P_2 - P_1) \\ P_2 - P_1 &= \rho(P_1 - P_0) \end{aligned}$$

この等式たちの辺々を掛け合わせると,

$$\begin{aligned} P_n - P_{n-1} &= \rho^{n-1}(P_1 - P_0) \\ &= \rho^{n-1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}P_0 - P_0\right) \quad (\text{式 (1.1) より}) \\ &= \rho^{n-1}(\rho - 1)p_0 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} P_n - P_0 &= (P_n - P_{n-1}) + (P_{n-1} - P_{n-2}) + \cdots + (P_2 - P_1) + (P_1 - P_0) \\ &= \rho^{n-1}(\rho-1)p_0 + \rho^{n-2}(\rho-1)p_0 + \cdots + \rho(\rho-1)p_0 + (\rho-1)p_0 \\ &= (\rho-1)p_0(\rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \cdots + \rho + 1) \\ &= (\rho-1)p_0 \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} \\ &= (\rho^n - 1)P_0 \end{aligned}$$

両辺に P_0 を足すと

$$P_n = P_0 \cdot \rho^n = \frac{\lambda^n}{\mu^n}P_0$$

となる.

これでモデルの中にいる人数別の確率 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ を求めたことになるが, 実際にはこの中のどれか一つが起こる. よって, これらを全て合計した値は 1 になる. つまり,

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_n + \cdots = 1$$

となる. これに今までに得られた結果を代入すると

$$P_0 \left(\underline{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \cdots + \frac{\lambda^n}{\mu^n} + \cdots} \right) = 1$$

となる．上記の下線部分は, 初項 1, 公比 $\frac{\lambda}{\mu}$ の無限等比級数の和の式である．$\frac{\lambda}{\mu} < 1$(∵ 行列が収束するためにはこの条件が成立する必要がある) であるから, この無限等比級数は収束するので,

$$P_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = 1.$$

よって

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

待ち行列理論では, 実際に上でやったようによく $\frac{\lambda}{\mu}$ を ρ で表し, **窓口利用率**と呼ぶ．以下, 特に断らない限り, ρ は窓口利用率を表していることとする．ちなみに, ρ はちょうど窓口がふさがっている確率を表している．今までに得られた結果を, ρ を使って書き直すと以下のようになる．

$$\begin{aligned} P_0 &= 1-\rho \\ P_1 &= \rho P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= \rho^n P_0 \end{aligned}$$

1.6.3 1.6.1 の公式の導出 ステップ 2(実際に 1.6.1 で挙げた解を求める)

1. 待たされる確率 P_q
   (待たされる確率)=(先客がいる確率) であるから, 求める確率は

   $$P_q = 1 - P_0 = 1 - (1-\rho) = \rho$$

   となる．

2. 系内にいる平均客数 L
   系内にいる人の数とはサービス中の人と行列に並んでいる人の合計である．
   確率の場合平均は期待値で表されるので, nP_n を n から無限大まで合計したものになるから

   $$\begin{aligned} L &= 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + \cdots + nP_n + \cdots \\ &= P_0(\rho + 2\rho^2 + \cdots + n\rho^n + \cdots) \end{aligned}$$

   となる．

   $$S = \rho + 2\rho^2 + \cdots + n\rho^n + \cdots \tag{1.2}$$

   とおき, 両辺に ρ を掛けると,

   $$\rho S = \rho^2 + 2\rho^3 + \cdots + n\rho^{n+1} + \cdots \tag{1.3}$$

   となる．式 (1.2)− 式 (1.3) をすると,

   $$(1-\rho)S = \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^n + \cdots = \frac{\rho}{1-\rho}$$

   である．よって

   $$S = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

   となるから

   $$L = P_0 S = (1-\rho) \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{1.4}$$

3. 待ち行列の平均の長さ L_q
   待ち行列の平均の長さを求めるが, $M/M/1$ モデルでは単純に L から 1 を引けばよいというわけにはいかない. もし, お客さんのサービスが半分終わっているのならば, 0.5 人と考える必要があるからである. よって, サービス中の 1 人を除いて, P_n のときに待ち行列の人が $(n-1)$ 人になる確率の期待値を求めるが, P_0 のときは, 行列もできないので除外する.

$$\begin{aligned} L_q &= (1-1)P_1 + (2-1)P_2 + \cdots + (n-1)P_n + \cdots \\ &= P_2 + 2P_3 + \cdots + (n-1)P_n + \cdots \\ &= P_0\{\rho^2 + 2\rho^3 + \cdots + (n-1)\rho^n + \cdots\} \end{aligned}$$

   となる.

$$S = \rho^2 + 2\rho^3 + \cdots + (n-1)\rho^n + \cdots \tag{1.5}$$

   とおき, 両辺に ρ を掛けると,

$$\rho S = \rho^3 + 2\rho^4 + \cdots + (n-1)\rho^{n+1} + \cdots \tag{1.6}$$

   となる. 式 (1.5)− 式 (1.6) をすると,

$$(1-\rho)S = \rho^2 + \rho^3 + \cdots + \rho^n + \cdots = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

   である. よって

$$S = \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}$$

   となるから

$$L_q = P_0 S = (1-\rho)\cdot\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

4. 平均待ち時間 W_q
   あるお客さん (仮に A さんとする) が系内に滞在する平均の時間を考える. A さんは, W_q だけ待った後, サービスを受けて立ち去る. 従って,

$$(\text{系内に滞在する時間}) = W_q + (\text{平均サービス時間}) = W_q + \frac{1}{\mu}$$

   となる. このようなお客さんが, 平均到着率 λ で来るので, 系内にいるお客さんの人数は

$$(\text{系内に滞在する時間}) \times \lambda$$

   となる. 系内にいるお客さんの人数は, 2. で求めているので,

$$L = \left(W_q + \frac{1}{\mu}\right)\lambda$$

   という関係式が成り立つ. この式を整理して, W_q についてまとめると

$$W_q = \frac{L}{\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

   となる. この式に式 (1.4) を代入すると

$$W_q = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho\mu - \lambda(1-\rho)}{\lambda(1-\rho)\mu} = \frac{\rho\mu - \lambda + \lambda\rho}{\lambda(1-\rho)\mu}$$

   で, $\dfrac{\lambda}{\mu} = \rho$ より $\rho\mu = \lambda$ であるから

$$W_q = \frac{\lambda\rho}{\lambda(1-\rho)\mu} = \frac{\rho}{(1-\rho)\mu}$$

   となる.

2　今回のモデル

2.1　現状

今回は便宜上私の家の最寄駅の改札について考えることにする. 改札の配置は以下のようになっている.

図 1: 駅の改札の配置 (現在)

改札ア : 退場 (↓) かつ IC カードのみ OK
改札イ : 入退場 (↕)OK で, IC カード, 切符どちらも OK
改札ウ : 入場 (↑) のみ OK で, IC カード, 切符どちらも OK

実際に行った調査 (9/13(水) の 8:30〜8:45 に実施 (上り, 下り各 2 本ずつ)) より, 次のデータを得た.

表 1: 8:30 と 8:31 の電車について

	1 番目に出た人の時間	最後に出た人の時間	2 分間で出た人の数
改札ア	8:34	8:36	46 人
改札イ	8:34	8:36	30 人

表 2: 8:43 と 8:45 の電車について

	1 番目に出た人の時間	最後に出た人の時間	5 分間で出た人の数
改札ア	8:46	8:51	47 人
改札イ	8:46	8:51	23 人

< 改札アについて >
平均到着率 $\lambda = 16$ 人/分, 平均サービス率 $\mu = 20$ 人/分
$Pq = \rho = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5} = 0.8,\ L = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$
$Lq = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{\frac{16}{25}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{16}{5} = 3.2,\ Wq = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \dfrac{\frac{4}{5}}{20 \cdot \frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5}$ =0.2 分=12 秒
< 改札イについて >
平均到着率 $\lambda = 10$ 人/分, 平均サービス率 $\mu = 20$ 人/分
$Pq = \rho = \dfrac{10}{20} = 0.5,\ L = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$
$Lq = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} = 0.5,\ Wq = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{20 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{20}$ =0.05 分=3 秒

2.2　今後への提案の方針

2.1 より, 改札アを通る人が圧倒的に多く, 行列がたくさんできていることが分かる. そこで, どのような改札の配置にすれば, どの改札を通る人も同じくらいの人数になるのかを考える. まず, 改札アを通っている人がどのようなことがあったら改札イを通ろうと思うのかを考える. その前に, 改札に入る人の動きも見ておくことにする. 実際に行った調査 (10/18(水) の 8:30〜8:45 に実施 (上り, 下り各 2 本ずつ)) より, 次のデータを得た.

表 3: 改札を入った人の人数について

	8:30 と 8:31 の電車	8:43 と 8:45 の電車
改札イ	33 人	114 人
改札ウ	30 人	68 人

この調査から改札イから入る人が多いことがわかる．そこで改札イと改札アの位置を交換することを考え, それによって人の動きにどのような変化があるかを推測した.

図 2: 駅の改札の配置 (仮定)

改札ア：退場 ($\downarrow$) かつ IC カードのみ OK
改札イ：入退場 ($\updownarrow$)OK で, IC カード, 切符どちらも OK
改札ウ：入場 ($\uparrow$) のみ OK で, IC カード, 切符どちらも OK

- 退場者
  人は端に行きたがる傾向があり, まずは改札イに行くが, 改札イからは入場者がくるかもしれないと考え, 真ん中ではあるが, 退場専用の改札アに行く人も増えるのではないか.

- 入場者
  変更後, さらに端に移動した改札イを利用しようとするが, 改札イでは退場者がくるかもしれないと考え, 改札ウを利用しようとする人も現れるのではないか.

今後の課題

今回は朝の時間帯に調査をして, その結果に基づいて議論を進めてきたが, 今後は 1 日の改札の出入りを見て, 最良の改札の配置を提案したい. また, 改札の配置の仮定をしてみたが, それによって具体的な数値としてどの程度効果があるのか, それとも逆に今の配置の方が良いのかなどを考えていきたい.

参考文献

[1] 桐山光弘, 待ち行列がわかる本, 日刊工業新聞社, 1997.

[2] 穴太克則, 講義：確率・統計, 学術図書出版社, 2011.

[3] 井上雅裕, 他, システム工学 定量的な意思決定法, オーム社, 2013.

[4] 岡部恒治, 他, 高等学校数学 B, 数研出版, 2014.