素数定理の複素解析での証明

芝浦工業大学　数理科学研究会

平成 29 年 11 月 4 日

制作:BV16048 辻村　将吾

目 次

1　はじめに

今回このテーマにした理由は, 「素数が存在する確率」を近似できる関数が存在するという話を聞いて興味を持ち, 証明が「複素関数」を用いることによってできることに感銘を受け, このテーマにした.

2　素数定理とは

$\pi(x) =$「x 以下の素数の個数」とすると, 以下の定理が成り立つ.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

実際, この値を計算すると以下の表のようになる. もちろん, 極限を考えたときの $x = 100$ や $x = 1000$ は

x	$\pi(x)$	$\log x$	$\frac{\pi(x)\log x}{x}$
10	4	2.30258	0.92103
100	25	4.60517	1.15129
1000	168	6.90775	1.16050
10000	1229	9.21034	1.13195

極めて小さい数字であるために「収束するスピードはあまり速くはない」ということがいえる.

「素数定理」の証明をいくつかあることを紹介する. まず, Riemann は 1859 年の記念碑的論文において Euler が考察していた級数を複素変数で考察して $\zeta(s)$ と名付けた. そして $\zeta(s)$ を複素平面全体へと解析接続をすることによって素数分布との関係を調べていった. しかし, Riemann 自身は素数定理を証明することはかなわなかったが「$\zeta(s)$ は $Re(s) = 1$ 上に零点を持たない.」という定理から素数定理を導出することが判明し, それを実際に証明したのが Hadamard と Valee'-Poussin だった. 今回で用いる証明は Cauchy の積分公式を用いることによって素数定理の証明を与えた Newman の考え方によって証明していきたいと思う.

2.1　証明の流れ

以下の三つの関数の性質を調べながら証明していく

(i) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

(ii) $\Phi(s) = \sum_{p} \frac{\log p}{p^s}$

(iii) $\theta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p$

これらはそれぞれ,1 つめが「リーマンのゼータ関数」, 2 つ目は素数全体にわたる和, 3 つめは x 以下の素数全体にわたる和. 特に, $\zeta(s)$, $\Phi(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で正則な関数である. それぞれの関数についての命題があるため, それを証明しながら素数定理の証明を完成させる.

3 $\zeta(s)$ の特徴ついて

これより, $\mathrm{Re}(s)$ は複素数の実部, $Im(s)$ は複素数の虚部とする. すると以下のような性質がある.

定理 3.1. $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ は正則関数として $\mathrm{Re}(s) > 0$ に拡張できる.

このとき, $s = 1$ は特異点であるという. これを証明するために以下の命題を示す.

命題 3.2. $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対し, 以下が成り立つ.

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}}$$

これは $\zeta(s)$ の **オイラー積表示** というものである. この $\prod$ の意味は積を表す記号である. $s = \mathrm{Re}(s) + Im(s)i$ とする. ここで

$$|n^{Im(s)i}| = |(n^{Im(s)})^i| = 1 \quad (n^{Im(s)} \neq 0) \qquad \therefore |n^s| = |n^{\mathrm{Re}(s)+Im(s)i}| = |n^{\mathrm{Re}(s)}||n^{Im(s)i}| = n^{\mathrm{Re}(s)}$$

証明. 数列 $\{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\}$ は単調増加のため, 収束することを示すために有界性を示す. N 個目までの和 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$ より大きい面積を $y = \frac{1}{x^s}$ を利用することで考える. また, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s = 1$ のとき発散するため $s > 1$ のときを考える. このとき, 図 1 の中で階段の面積は色をつけた部分の面積よりも小さいので

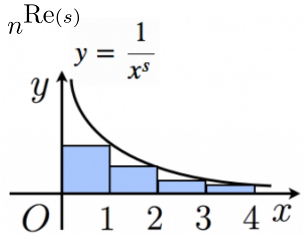

図 1: $y = \dfrac{1}{x^s}$ のグラフ

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^N \frac{1}{x^s} dx &= 1 + \frac{1}{-s+1}[x^{-s+1}]_1^N \\
&= 1 + \frac{N^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} \\
&< 1 + \frac{1}{s-1} (\because\ s > 1)
\end{aligned}$$

が成り立ち, 有界. したがって単調数列で有界なため数列 $\{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\}$ は単調数列でかつ有界であるため収束する. 次に一般的なゼータ関数の式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s \in \mathbb{C})$$

ではどうなるか? まず, $|n^s| = n^{\mathrm{Re}(s)}$ であるため先ほどの結果より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^s|}$ が収束することがわかる. つまり

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

は絶対収束する. したがって左辺が収束することがわかった. 次に右辺が収束することを示す. 素数 p と $\mathrm{Re}(s) > 1$ なる s にたいし,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} - 1\right| = \left|\frac{p^s}{p^s - 1} - 1\right| &= \left|\frac{1}{p^s - 1}\right| \\
&< \frac{1}{|p^s| - 1} < \frac{2}{p^s} = \frac{2}{p^{\mathrm{Re}(s)}} (\because\ |p^s| = |p^{\mathrm{Re}(s)}| > p \geqq 2)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで N 個目の素数を P とおくと, N 個目までの和について

$$\sum_{p \leqq P} \left|\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} - 1\right| < \sum_{p \leqq P} \frac{2}{p^{\mathrm{Re}(s)}} < \sum_{n=1}^{P} \frac{2}{n^{\mathrm{Re}(s)}} < 2\zeta(\mathrm{Re}(s))$$

したがって有界．単調増加数列で有界のため $\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ は収束する．右辺と左辺は収束することが判明したため, 次にその二つが一致することを示す．また, 以下では s は $s>1$ なる実数とする．

まず, N 個目の素数を P とおき, 有限積を考える．

$$\begin{aligned}\prod_{p \leqq P} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = &(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{2^{3s}}+\cdots\cdots) \\ &\times (1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{3^{3s}}+\cdots\cdots)\times \\ &\cdots\cdots \\ &\times (1+\frac{1}{P^s}+\frac{1}{P^{2s}}+\frac{1}{P^{3s}}+\cdots)\end{aligned}$$

ここで, P 以下の数の素因数分解にある素数はすべて P 以下になるため.

$$\sum_{n=1}^{P} \frac{1}{n^s} < \prod_{p \leqq P} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

また, 素因数分解の一意性より展開したときに同じ数は現れないので

$$\sum_{n=1}^{P} \frac{1}{n^s} < \prod_{p \leqq P} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

ここで, $N \to \infty$ のとき, $P \to \infty$ より $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{P} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ したがってはさみうちの原理より

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

□

次に定理 3.1 を証明していく．証明していくために重要な「ワイヤシュトラスの M-判定法」を紹介する．

[ワイヤシュトラスの M-判定法] D 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し, 正数列 $\{M_n\}$ で

(i) すべての D 内の x と n で, $|f_n(x)| \leqq M_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

となるものがあれば, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は一様収束する．

また, 正則関数の性質で以下のようなことが成り立つことも知られている．

> [広義一様収束と正則性] 領域 D で正則な関数の列 $\{f_n(x)\}$ が極限関数 $f(x)$ に広義一様収束するなら, $f(x)$ は正則である. しかも, 導関数の列 $\{f_n(x)'\}$ も $f'(x)$ に広義一様収束する.

これらを利用することによって定理 3.1 を証明できる.

証明. $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^s}dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-s}\cdot\frac{1}{x^{s-1}}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{n^{s-1}}-1\right) = \frac{1}{s-1}$$

$\therefore \dfrac{1}{s-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{1}{n^s}dx$ となる. したがって $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ の定義域を拡張するために無限級数

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1}\frac{1}{x^s}dx\right) = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx$$

を考える. この無限級数が $Rs(s) > 0$ で広義一様収束することを示せば正則である. まず, $\mathrm{Re}(s) > 0$ 内の有界閉集合 D をとり, ある a により $\mathrm{Re}(s) \leqq a \quad (a > 0)$ に含まれるようにする.

$$\int_n^x \frac{s}{t^{n+1}}dt = \left[-\frac{1}{t^s}\right]_n^x = \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}$$

となることに注意すると, $\displaystyle\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx = \int_n^{n+1}\left(\int_n^x \frac{s}{t^{s+t}}dt\right)dx$ となる. したがって

$$\begin{aligned}
\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\right| &= \left|\int_n^{n+1}\left(\int_n^x \frac{s}{t^{s+1}}dt\right)dx\right| \\
&\leqq \int_n^{n+1}\left(\int_n^x \left|\frac{s}{t^{s+1}}\right|dt\right)dx \\
&\leqq \int_n^{n+1}\left(\int_n^x \frac{|s|}{t^{\mathrm{Re}(s)+1}}dt\right)dx \\
&\leqq \int_n^{n+1}\left(\int_n^{n+1} \frac{|s|}{t^{\mathrm{Re}(s)+1}}dt\right)dx
\end{aligned}$$

となる. ここで $n^{\mathrm{Re}(s)+1} \leqq t^{\mathrm{Re}(s)+1} \leqq (n+1)^{\mathrm{Re}(s)+1}$ のため

$$\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\right| \leqq \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}} \leqq \frac{|s|}{n^{a+1}}(= M_n)$$

ここで $a+1 > 1$ であるため $\sum_{n=1}^\infty M_n = |s|\zeta(a+1)$ が収束して, ワイヤシュトラスの M-判定法より

$$\sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx$$

は D で一様収束する. よってこれは $\mathrm{Re}(s) > 0$ で正則であるといえる. $\mathrm{Re}(s) > 1$ で

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx$$

のため, $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ が正則関数として $\mathrm{Re}(s) > 0$ に拡張できた. したがって, $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ の範囲で正則である. □

4 $\Phi(s)$ に関する特徴

素数全体にわたる和, $\Phi(s)=\displaystyle\sum_p \frac{\log p}{p^s} \qquad (p$ は素数$)$ に関しても特徴がいくつかある. その中でも素数定理に関わる大切な命題があるためそれを証明する.

命題 4.1. $\mathrm{Re}(s) \geqq 1$, $s \neq 1$ に対し, $\zeta(s) \neq 0$ である. また, $\Phi(s) - \dfrac{1}{s-1}$ は $\mathrm{Re}(s) \geqq 1$ に正則関数として拡張できる.

この命題を証明するために 2 つ定理を紹介する.

定理 4.2. D 上の関数列 $\{f_n(z)\}$ に対し, 正数列 $\{M_n\}$ で

(i) すべての D 内の x と n で, $|f_n(z)| \leqq M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

となるものがあれば, $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ は一様収束する.

定理 4.3. 領域 D で正則な関数の列 $\{f_n(x)\}$ があって

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$$

が D で広義一様収束するなら, $f(z)$ は D で正則である. しかも, 零点以外の点で,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$$

が成り立つ.

まず, $\Phi(s)$ の正則性を示してからこれらの定理を踏まえて証明をしていく.

証明.

$$\Phi(s) = \sum_{p} \frac{\log p}{p^s} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

において, $\mathrm{Re}(s) > 1$ 内の有界閉集合 D をとり, $a(\in \mathbb{R})$ をとり, D が

$$\mathrm{Re}(s) \geqq a \qquad (a > 1)$$

に含まれると仮定する. M-判定法を用いるために

$$f_n(s) = \begin{cases} \dfrac{\log p}{p^s} & (n = p) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

とおく. 収束するならば $\Phi(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ となる. まず, D で

$$|f_n(s)| \leqq \left|\frac{\log n}{n^s}\right| \leqq \frac{\log n}{n^a}$$

が成り立つ. ここで, 対数関数 $y = \log x$ とその $(1,0)$ における接線 $y = x - 1$ と上下関係

$$\log x \leqq x - 1 \quad (x > 0)$$

を利用する. $a > 1$ より, $a = 1 + 2b \quad (b > 0)$ とけて

$$\log n^b \leqq n^b - 1 (< n^b) \qquad \therefore \log n < \frac{1}{b} n^b$$

したがって, $|f_n(s)| \leqq \dfrac{\log n}{n^a} \leqq \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{n^b}{n^a} = \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{1}{n^{1+b}} (= M_n)$, $b > 0$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{1}{b}\zeta(1+b)$ が収束するため

ワイヤシュトラスの M-判定法より, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は D で一様収束する. したがって $\mathrm{Re}(s) > 1$ で正則になる.

したがって, $\zeta(s), \Phi(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ において正則. また,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

はどの項も $\mathrm{Re}(s) > 1$ で 0 にならないので $\zeta(s) \neq 0$ よって $\mathrm{Re}(s) \geqq 1$ に $(s \neq 1)$ に $\zeta(s)$ の零点があるならば $s = 1 + ai$(a は 0 でない実数) という形になる. これが存在しないことを示す.

まず, オイラー積が $\mathrm{Re}(s) > 1$ で広義一様収束することを確認.

$$\frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}} = 1 + f_p(s) \Leftrightarrow f_p(s) = \frac{p^s}{p^s - 1} - 1 = \frac{1}{p^s - 1}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ |f_p(s)| &\leqq \frac{1}{|p^s| - 1} < \frac{2}{|p^s|} \qquad (\because\ |p^s| = |p^{\mathrm{Re}(s)}| > p \geqq 2) \\
&= \frac{2}{p^{\mathrm{Re}(s)}} < \frac{2}{p^b} (= M_n)
\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = 2\zeta(b)$ となる. したがってオイラー積は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で広義一様収束する. 次に定理 4.3 を用いると $\zeta(s)$ の零点以外では対数微分が可能である. また, $\log(\prod p) = \sum(\log p)$ となるため

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}} \qquad \therefore \log \zeta(s) = -\sum_p \log(1 - \frac{1}{p^s})$$

したがって $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\displaystyle\sum_p \frac{\log p}{p^s - 1}$ さらに,

$$\frac{1}{p^s - 1} = \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^s - 1} - \frac{1}{p^s} = \frac{1}{p^s} + \frac{1}{(p^s - 1)p^s}$$

であることを利用することによって

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} = -\sum_p \frac{\log p}{p^s} - \sum_p \frac{\log p}{(p^s - 1)p^s} = -\Phi(s) - \sum_p \frac{\log p}{(p^s - 1)p^s}$$

ここで, 上式の級数部分は $\mathrm{Re}(s) > \dfrac{1}{2}$ において広義一様収束し, 正則関数となる. これを示していく. $\mathrm{Re}(s) > \dfrac{1}{2}$ 内の有界閉集合 D をとり, ある $c > \dfrac{1}{2}$ により D が $\mathrm{Re}(s) \geqq c$ に含まれるようにする.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\log p}{(p^s - 1)p^s} \right| &\leqq \frac{\log p}{(|p^s| - 1)|p^s|} \\
&\leqq \frac{2 \log p}{|p^{2s}|} < \frac{2 \log p}{p^{2c}} (= M'_n),
\end{aligned}$$

したがって $\sum_{n=1}^{\infty} M'_n = 2\Phi(2c)$ となる．ここで $\Phi(s)$ が正則な範囲は $\mathrm{Re}(s) > 1$ なので $c > 1$ から $\Phi(2c)$ は収束する．よって $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ において $\sum_p \frac{\log p}{(p^s - 1)p^s}$ は広義一様収束し, 正則関数になる．

次に $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ について考える．$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で有理型 (極は $s = 1$ のみ) なので, $\zeta'(s)$ も $\mathrm{Re}(s) > 0$ 有理型 (極は $s = 1$ のみ) です．よって, $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ は有理型で, 極は $s = 1$ と $\zeta(s)$ の零点のみ.

$\zeta(s)$ は 1 次の極 $s = 1$ での留数が 1 なので

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-1)^n$$

と Laurent 展開できます．項別微分すると

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (s-1)^{n-1}$$

である．ここで

$$(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = (s-1)\frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (s-1)^{n-1}}{\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (s-1)^n} \to -1 \qquad (s \to 1)$$

より, $s = 1$ は $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ の 1 次の極で, 留数は -1 となる．よって $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$ は $s = 1$ で正則．ここで, $\Phi(s) - \frac{1}{s-1} = -\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right)$ となり, $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ の $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ における極は存在するとしても $\zeta(s)$ の零点のみである．したがって $\zeta(s)$ の零点がないことを示せるのならば

$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$$

は $\mathrm{Re}(s) \geqq 1$ に正則関数として拡張することができる．ここで, $s = 1 + ai \quad (a > 0)$ が $\zeta(s)$ の u 次 $(u \geqq 0)$ の零点だと仮定する．$u = 0$ を示す．まず,

$$\left(p^{\frac{ai}{2}} + p^{-\frac{ai}{2}}\right)^4 = p^{2ai} + 4p^{ai} + 6 + 4p^{-ai} + p^{-2ai}, \qquad p^{\frac{ai}{2}} + p^{\frac{-ai}{2}} = 2Re\left(p^{\frac{ai}{2}}\right)$$

を利用する．$s = 1 + 2ai$ も v 次 $(v \geqq 0)$ の零点とする．共役複素数を考えると

$$\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$$

となるので,「$\zeta(s) = 0$ ならば$\zeta(\overline{s}) = 0$」となる．よって $s = 1 - ai$ は u 次の零点, $s = 1 - 2ai$ は v 次の零点となる．ここで,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + a_0 + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \cdots$$

が $s = 1$ での Laurent 展開である．$s = 1 \pm ai$(u 次の零点) での Taylor 展開は

$$\zeta(s) = b_u(s - (1 \pm ai))^u + b_{u+1}(s - (1 \pm ai))^{u+1} + b_{u+2}(s - (1 \pm ai))^{u+2} + \cdots$$

とおける．また, $s = 1 \pm 2ai$ での Taylor 展開も

$$\zeta(s) = c_v(s - (1 \pm 2ai))^v + c_{v+1}(s - (1 \pm 2ai))^{v+1} + c_{v+2}(s - (1 \pm 2ai))^{v+2} + \cdots$$

$$\zeta'(s) = vc_v(s-(1\pm 2ai))^{v-1} + (v+1)c_{v+1}(s-(1\pm 2ai))^{v} + (v+2)c_{v+2}(s-(1\pm 2ai))^{v+1} + \cdots$$

となる．先ほどのように

$$\Phi(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s}$$

となるため, 両辺に $\varepsilon(\varepsilon>0)$ をかけ, $s=1+\varepsilon$ を代入すると

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} + \varepsilon\sum_p \frac{\log p}{(p^{1+\varepsilon}-1)p^{1+\varepsilon}}\right) = 1$$

次に, 同様に $s=1+\varepsilon\pm ai$ を代入することにより

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon\pm ai) = -u$$

$s=1+\varepsilon\pm 2ai$ を代入して

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon\pm 2ai) = -v$$

ここで, $\left(p^{\frac{ai}{2}}+p^{\frac{-ai}{2}}\right)^4$, $p^{\frac{ai}{2}}+p^{\frac{-ai}{2}}$ を計算することによって

$$\begin{aligned}
\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(2Re(p^{\frac{ia}{2}})\right)^4 &= \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(p^{\frac{ia}{2}}+p^{\frac{-ia}{2}}\right) \\
&= \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(p^{2ai}+4p^{ai}+6+4p^{-ai}+p^{-2ai}\right) \\
&= \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon-2ai}} + 4\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon-ai}} + 6\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} + 4\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+ai}} + \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+2ai}}
\end{aligned}$$

となる．この式の左辺は正の実数となっている．両辺に $\varepsilon(\varepsilon>0)$ をかけ $\varepsilon\to 0$ とすることにより右辺は

$$-v-4u+6-4u-v = 2(3-4u-v)$$

に収束する．したがって, 0 以上の整数 u, v が

$$3-4u-v \geqq 0$$

$u \geqq 1$ では不合理．したがって $u=0$ となるため「$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)\geqq 1$, $s\neq 1$ に零点を持たない」および「$\Phi(s)$-$\dfrac{1}{s-1}$ は $\mathrm{Re}(s)\geqq 1$ に正則関数として拡張できる」ことが証明された． □

5 $\theta(x)$ の特徴について

今までの関数はそれぞれ, 複素数に拡張できる関数を扱っていたが, 今回扱う $\theta(x)$ は実数範囲の関数で複素数には拡張することができないのが特徴．そんな $\theta(x)$ の特徴を表す命題 3 つ存在するが, そのうちの 2 つを証明していく．

命題 5.1. $\theta(x) = O(x)$ となる．

証明. 二項定理 $(a+b)^n = {}_nC_0a^nb^0 + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + \cdots + {}_nC_na^0b^n \qquad (a,b,n\in\mathbb{R})$ を用いる．$(a+b)^{2n}$ に $a=b=1$ を代入することによって

$$\begin{aligned}
2^{2n} &= (1+1)^{2n} \\
&= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + \cdots + {}_{2n}C_n + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} + {}_{2n}C_{2n}
\end{aligned}$$

この中の ${}_{2n}C_n$ の評価をすると

$$2^{2n} \geqq {}_{2n}C_n = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

ここで, 右辺の ${}_{2n}C_n$ は自然数なため, $(n+1)$ と $2n$ 以外はすべて約分される．したがって最右辺は $(n+1) \leqq p \leqq 2n$ を満たすような素数 p の積と表される．これを簡略化のために $\prod p$ とおく．すると上式は

$$2^{2n} \geqq \prod p = e^{\log \prod p}$$

と表される．ここで $\log(\prod p) = \sum(\log p)$ である．$\theta(x)$ は「$1 \leqq p \leqq x$ を満たす素数 p 全体にわたる $\log p$ の和」なので「$n+1 \leqq p \leqq 2n$」は $\theta(2n) - \theta(n)$ と表される．ここで, 先ほどの不等式は

$$2^{2n} \geqq e^{\theta(2n)-\theta(n)} \qquad \therefore\ 2n \log 2 \geqq \theta(2n) - \theta(n)$$

が得られる． ここで, $n = 2^{k-1}(k \in \mathbb{N})$ と置くと上式は $2^k \log 2 \geqq \theta(2^k) - \theta(2^{k-1})$ と表される． $k = 1, 2, \cdots, m$ とおきこれらを並べ和を計算することによって

$$(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^m) \log 2 \geqq \theta(2^m)$$

が成り立つ．左辺の和は等比数列の和のため $2 + 2^2 + \cdots + 2^m = \dfrac{2(2^m - 1)}{2-1} = 2^{m+1} - 2 < 2^{m+1}$ と評価できる．この評価によって先ほどの不等式は

$$\theta(2^m) \leqq 2^{m+1} \log 2$$

となる．ここで, $x \geqq 1$ を満たす x に対して

$$2^m \leqq x < 2^{m+1}$$

となる $m(\in \mathbb{N})$ が存在する．θ は非減少関数であるので

$$0 \leqq \theta(x) \leqq \theta(2^{m+1})$$

ここで, $2^m \leqq x$ であるから

$$0 \leqq \theta(x) \leqq \theta(2^{m+1}) \leqq (2 \log 2)x$$

したがって $\theta(x) = O(x)$ となる． □

次に, 素数定理を証明するに当たって大事な 3 つの命題のうち 2 つめの命題を示すために必要になる定理を紹介する．

定理 5.2. $t \geqq 0$ で定義された関数 $f(t)$ は有界かつ局所可積分であるとし, $\mathrm{Re}(z) > 0$ 上の関数

$$g(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$$

が $\mathrm{Re}(z) \geqq 0$ に正則関数として拡張できるとする．このとき広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ は収束し, しかも極限値は $g(0)$ に等しい．

定理 5.2 の証明をまず行う．

証明. まず $T > 0$ に対し, 定積分で表された関数 $g_T(z) = \displaystyle\int_0^T f(t)e^{-zt}dt$ について考える.$g(z) = \displaystyle\lim_{T\to\infty} g_T(z) \quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$ を利用するために考える．$f(t)$ は局所可積分なので $f(t)e^{-zt}$ も積分できる．このとき積分計算の順序交

換を認めると, 任意の閉曲線 C にたいして

$$\begin{aligned}\int_C g_T(z)dz &= \int_C \left(\int_0^T f(t)e^{-zt}dt\right)dz \\ &= \int_0^T f(t)\left(\int_C e^{-zt}dz\right)dt\end{aligned}$$

e^{-zt} は複素平面全体で正則であるため, Cauchy の積分定理より

$$\int_C e^{-zt}dz = 0$$

となりゆえに

$$\int_C g_T(z)dz = \int_0^T f(t)\cdot 0dt = 0$$

C は任意のため $g_T(z)$ は複素平面全体で正則である. ここで, $g(z)$ は $\mathrm{Re}(z) \geqq 0$ で正則である. 正則関数は各点で Taylor 展開可能であるから, Taylor 級数の収束円内でも正則. したがって, 境界 $\mathrm{Re}(z) = 0$ 上の Taylor 展開を考えて $\mathrm{Re}(z) \geqq 0$ を含む開領域で正則. さらにその開領域に

$$|z| \leqq R \text{ かつ } Re(z) \geqq -\delta$$

上で与えられた領域の境界線を C とおく. すると, $g(z)$ は C の周および内部で正則である. $g_T(z)$ も正則である. ここで, この定理の証明をするためには

$$\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0)$$

を示せば十分.

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

の形は $\mathrm{Re}(z) > 0$ で定義されているが $\mathrm{Re}(z) \geqq 0$ に正則関数として拡張したときに $g(z)$ が積分形で表せるかどうかは, 不明. もちろん $g_T(z)$ も正則のため,

$$(g(z) - g_T(z))e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$$

である. ここで, Cauchy の積分公式により

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C (g(z) - g_T(z))e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}$$

ここで, $T \to \infty$ のとき右辺の極限が 0 になることを示すため積分を評価する. そのために 2 つに周の長さ C を分割する.

$$C_+ = C \cap \{\mathrm{Re} > 0\} \qquad C_- = C \cap \{\mathrm{Re} < 0\}$$

とおくことができる. $f(t)$ が $t \geqq 0$ で有界であるから $B = \max|f(x)|(t \geqq 0)$ とおける. C_+ に沿っての線積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+} (g(z) - g_T(z))e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}$$

被積分関数の絶対値を評価していくと

$$\begin{aligned}|g(z) - g_T(z)| &= \left|\int_T^\infty f(t)e^{-zt}\,dt\right| \\ &\leqq B\left|\int_T^\infty e^{-zt}dt\right| \leqq B\int_T^\infty e^{-\mathrm{Re}(z)t}\,dt \\ &= B\left[\frac{-1}{\mathrm{Re}(z)}e^{-\mathrm{Re}(z)t}\right]_T^\infty = \frac{B}{\mathrm{Re}(z)}e^{-\mathrm{Re}(z)T}\end{aligned}$$

ここで, $z = Re^{i\theta}$ とおくことによって

$$\begin{aligned}\left| e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\cdot\frac{1}{z}\right| &= e^{\mathrm{Re}(z)T}\left|\frac{1+e^{2i\theta}}{Re^{i\theta}}\right| \\ &= e^{\mathrm{Re}(z)T}\frac{\left|e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right|}{R} = e^{\mathrm{Re}(z)T}\frac{2\left|Re(z)\right|}{R^2}\end{aligned}$$

となる．ここで, $\displaystyle\int_{C_+}|dz| = \pi R$ となるため

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}(g(z)-g_T(z))e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{C_+}\left|(g(z)-g_T(z))e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right||dz| \\ &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{C_+}\frac{B}{\mathrm{Re}(z)}e^{-\mathrm{Re}(z)T}\cdot e^{\mathrm{Re}(z)T}\frac{2\left|\mathrm{Re}(z)\right|}{R^2}|dz| \\ &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{C_+}\frac{B}{\mathrm{Re}(z}e^{-\mathrm{Re}(z)T}\cdot e^{\mathrm{Re}(z)T}\frac{2\left|\mathrm{Re}(z)\right|}{R^2}|dz| \\ &= \frac{B}{\pi R^2}\int_{C_+}|dz| = \frac{B}{\pi R^2}\cdot\pi R = \frac{B}{R}\end{aligned}$$

と評価できるため C_+ の評価は終了．次に C_- の評価でなく $T\to\infty$ のとき 0 に収束することを示す．有界閉集合 C_- 上で, $g(z)\left(1+\dfrac{z^2}{R^2}\right)\cdot\dfrac{1}{z}$ の絶対値には最大値が存在するためそれを M とする. すると

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}g(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \leqq \frac{M}{2\pi}\int_{C_-}\left|e^{zT}\right||dz| = \frac{M}{2\pi}\int_{C_-}e^{\mathrm{Re}(z)T}|dz|$$

ここで, C_- は実軸対称があるため上半分の積分の 2 倍として計算できる．弧 AB: $z = \mathrm{Re}^{i\theta}\left(\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\lambda\right)\cdots\cos\lambda = -\dfrac{\delta}{R}$ 線分 BC:$z = -\delta+it\left(0\leqq t\leqq\sqrt{R^2-\delta^2}\right)$ として評価を続けると

$$\begin{aligned}\frac{M}{2\pi}\int_{C_-}e^{\mathrm{Re}(z)T}|dz| &= 2\cdot\frac{M}{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\lambda}e^{R(\cos\theta)T}R\,d\theta+\int_{\sqrt{R^2-\delta^2}}^{0}e^{-\delta T}\,dt\right) \\ &= \frac{M}{\pi}\left(\int_0^{-\frac{\delta}{R}}e^{RTt}R\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt-\sqrt{R^2-\delta^2}e^{-\delta T}\right) \qquad (t=\cos\theta, dt=-\sin\theta d\theta=-\sqrt{1-t^2}d\theta) \\ &\leqq \frac{M}{\pi}\left(\int_{-\frac{\delta}{R}}^{0}e^{RTt}R\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\delta^2}{R^2}}}\,dt-\sqrt{R^2-\delta^2}e^{-\delta T}\right) \\ &= \frac{M}{\pi}\left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2-\delta^2}}\left[\frac{e^{RTt}}{RT}\right]_{-\frac{\delta}{R}}^{0}-\sqrt{R^2-\delta^2}e^{-\delta T}\right) \\ &= \frac{M}{\pi}\left(\frac{R}{T}\cdot\frac{1-e^{-\delta T}}{\sqrt{R^2-\delta^2}}-\sqrt{R^2-\delta^2}e^{-\delta T}\right)\to 0 \qquad (T\to\infty)\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}g(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z} = 0$$

が成り立つ．以上から

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}|g(0)-g_T(0)| &= \lim_{T\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C(g(z)-g_T(z))e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \\ &\leqq \frac{B}{R}+\frac{B}{R}+0 = \frac{2B}{R}\end{aligned}$$

が $\forall R$ で成り立つ．したがって

$$\lim_{T\to\infty}|g(0)-g_T(0)|=0 \therefore \lim_{T\to\infty}g_T(0)=g(0)$$

つまり

$$\int_0^\infty f(t)dt=g(0)$$

□

次に, 本題の命題を証明する．

命題 5.3.

$$\int_1^\infty \frac{\theta(x)-x}{x^2}\,dx$$

は収束する．

証明. $\theta(x)=0,\quad (1\leqq x<2)$, $\theta(x)=\log 2\quad (2\leqq x<3)$, $\theta(x)=\log 2+\log 3\quad (3\leqq x<5)\cdots$ と表される．ここで, $\mathrm{Re}(s)>1$ に対して,

$$\begin{aligned}
s\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{s+1}}\,dx &= \int_1^2 0\,dx+\int_2^3\frac{s\log 2}{x^{s+1}}\,dx+\int_3^5\frac{s(\log 2+\log 3)}{x^{s+1}}\,dx+\int_5^7\frac{s(\log 2+\log 3+\log 5)}{x^{s+1}}\,dx+\cdots\\
&=\left(-\frac{\log 2}{3^s}+\frac{\log 2}{2^s}\right)+\left(-\frac{\log 2+\log 3}{5^s}+\frac{\log 2+\log 3}{3^s}\right)+\cdots\\
&=\frac{\log 2}{2^s}+\frac{\log 3}{3^s}+\frac{\log 5}{5^s}+\cdots=\Phi(s)
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{s+1}}\,dx=\frac{\Phi(s)}{s}$$

である．ここで, $f(t)=\theta(e^t)e^{-t}-1$ とおくと

$$\begin{aligned}
g(z)&=\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt\\
&=\int_0^\infty \theta(e^t)e^{-(z+1)t}\,dt-\int_0^\infty e^{-zt}\,dt\\
&=\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{z+2}}\,dx-\int_0^\infty e^{-zt}\,dt=\frac{\Phi(z+1)}{z+1}-\frac{1}{z}\qquad (x=e^t)
\end{aligned}$$

命題 4.1 より $g(z)$ は $\mathrm{Re}(z+1)\geqq 1$ つまり $\mathrm{Re}(z)\geqq 0$ に正則関数として拡張できる．また, $f(t)$ は条件より局所可積分である．さらに, 命題 5.1 より $\theta(e^t)=O(e^t)$ であるから

$$|\theta(e^t)|\leqq ke^t$$

$$\therefore\ |f(t)|=|\theta(e^t)e^{-t}-1|\leqq|\theta(e^t)e^{-t}|+1\leqq k+1$$

となる定数 k が存在するため有界である．したがって定理の条件を満たすため

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)\,dt&=\int_0^\infty(\theta(e^t)e^{-t}-1)\,dt\\
&=\int_1^\infty\frac{\theta(x)-x}{x^2}\,dx\quad (x=e^t)
\end{aligned}$$

が収束することが示せた．□

最後に, $\theta(x)$ に関する 3 つめの命題を示す．

命題 5.4.

$$\theta(x)\sim x$$

である．

証明. この命題の否定, つまり「ある正数 ε に対し, $1-\varepsilon < \dfrac{\theta(x)}{x} < 1+\varepsilon$ を満たさないいくらでも大きな x が存在する.」この否定をさらに

(i) 「ある正数 ε に対し, $1+\varepsilon \leqq \dfrac{\theta(x)}{x}$ となるいくらでも大きな x が存在する」

(ii) 「ある正数 ε に対し, $\dfrac{\theta(x)}{x} \leqq 1-\varepsilon$ となるいくらでも大きな x が存在する」

と分ける. この (i) と (ii) においてどちらにも矛盾が生じなければ命題が成立する. (i) のとき

$$\theta(x) \geqq x$$

が成り立つ. $\theta(t)$ は非減少関数なので

$$\theta(t) \geqq \theta(x) \geqq (1+\varepsilon)x \qquad (t \geqq x)$$

となる. したがって

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt \geqq \int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{(1+\varepsilon)x-t}{t^2}\,dt$$

となる. ここで, $t = xs$ に置換することによって

$$\begin{aligned}\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{(1+\varepsilon)x-t}{t^2}\,dt &= \int_1^{1+\varepsilon} \frac{(1+\varepsilon)x-xs}{(xs)^2} x\,ds \\ &= \int_1^{1+\varepsilon} \frac{(1+\varepsilon)-s}{s^2}\,ds\end{aligned}$$

となる. 一方命題 5.3 より

$$\begin{aligned}\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt &= \int_1^{(1+\varepsilon)x} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt - \int_1^{x} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt \\ &\to \int_1^{\infty} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt - \int_1^{\infty} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt \qquad (x \to \infty) = 0\end{aligned}$$

このため十分大きな x に対して $\displaystyle\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{(1+\varepsilon)x-t}{t^2}\,dt$ の絶対値は任意に小さな値を取る. したがって不合理であるため (i) は矛盾. 同様な手順で (ii) の場合を確認する.

$\dfrac{\theta(x)}{x} \leqq 1-\varepsilon$ なる x を一つ固定する. (i) と同様に評価し置換積分することにより

$$\int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt \leqq \int_{1-\varepsilon} 1 \frac{(1-\varepsilon)-s}{s^2}\,ds < 0$$

一方, 命題 5.3 によって

$$\begin{aligned}\int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt &= \int_1^{x} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt - \int_1^{(1-\varepsilon)x} \frac{\theta(t)-t}{t^2} \\ &\to \int_1^{\infty} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt - \int_1^{\infty} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt = 0 \qquad (x \to \infty)\end{aligned}$$

であるので十分大きな x では絶対値が小さい値になり不合理になるため矛盾. (i),(ii) どちらも矛盾が生じたために命題 5.4 を否定したことが誤りであったことが示された. よって命題 5.4 を示すことができた. □

6　素数定理の証明の完成

命題 5.3 を用いた素数定理の主張

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

つまり

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

を示す.

$\theta(x)$ の $\log p$ をすべて $\log x$ に変えると,

$$\theta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \leqq \sum_{p \leqq x} \log x$$

となる. $p \leqq x$ なる素数 p の個数が $\pi(x)$ となるため

$$\theta(x) \leqq \pi(x)\log x \qquad \therefore \frac{\pi(x)\log x}{x} \geqq \frac{\theta(x)}{x}$$

ここで, 命題 5.4 より $\dfrac{\theta(x)}{x} \to 1 \quad (x \to \infty)$ であるから $1 \leqq \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x}$ である. 次に, 逆向きの不等式を作る. 任意の小さな正数 ε を一つ取り $\theta(x)$ の素数を

$$x^{1-\varepsilon} < p \leqq x$$

の範囲にあるものだけにすることにより

$$\theta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \geqq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leqq x} \log p$$

となる. この範囲では

$$\log p > \log x^{1-\varepsilon}$$

と評価できる. 素数の個数は

$$\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \theta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p &\geqq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leqq x} \log x^{1-\varepsilon} \\ &= (1-\varepsilon)\{\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})\}\log x \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\pi(x)\log x}{x} \leqq \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{x} + \pi(x^{1-\varepsilon})\frac{\log x}{x}$$

が成り立つ. ここで

$$\pi(x^{1-\varepsilon}) \leqq x^{1-\varepsilon}$$

なので

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} \leqq \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{\varepsilon}}$$

が成り立ち, さらに

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\log x^{\varepsilon}}{x^{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot 0 = 0$$

これと命題 5.4 から

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\cdot\frac{\theta(x)}{x}+\frac{\log x}{x^{\varepsilon}}\right)=\frac{1}{1-\varepsilon}$$

となる. ここで,

$$\frac{\theta(x)}{x}\leqq\frac{\pi(x)\log x}{x}$$

と先ほどの式から

$$1\leqq\frac{\pi(x)\log x}{x}\leqq\frac{1}{1-\varepsilon}\qquad(x\to\infty)$$

ε は任意のためはさみうちの原理より

$$\frac{\pi(x)\log x}{x}=1$$

7　今後の課題

私は, この素数定理の複素解析による証明をするために昨年に「ゼータ関数」の研究を進めていき今年になって素数定理の複素解析による証明ができたためそこはよかった点です. 今後は複素解析のほかの応用例や素数定理の代数的な証明も研究したいと思いました.

参考文献

[1] 宮地秀樹, 「複素解析」, 日本評論社,2015 年.

[2] 吉田信夫, 「複素解析の神秘性」, 現代数学社, 2011 年.

[3] 内山三郎, 「素数の分布」, 宝文館出版株式会社, 1970 年.

[4] `http://nam-students.blogspot.jp/2015/11/blog-post_90.html` グラフ 最終アクセス 2017 年 10 月 30 日

[5] `https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/216487` 京都大学「素数定理の証明」の論文 最終アクセス 2017 年 10 月 30 日

[6] `http://integers.hatenablog.com/entry/2016/04/18/000000` 素数定理の証明に関する記事 最終アクセス 2017 年 10 月 12 日