熱方程式の解法

芝浦工業大学　数理科学研究会
池田隼人

平成 29 年 11 月 3 日

研究背景

熱方程式という言葉を講義で聞く機会があった．この熱方程式というのは, 偏微分方程式, フーリエ解析と関係があることが調べてみてわかった．以前から、自然現象や現象数理に興味があり, この最近学んだフーリエ解析を用いて現象について数学的に表せたらと思っていた．そこで今回, この熱方程式に取り掛かることに決めた．

1　熱方程式

1.1　熱方程式

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}$$

但し, ここでは熱伝導度を 1 とする．

上記の式が熱方程式であり, この方程式を解くと温度分布, つまり物質のどこの温度が高くて, どこが低いのか, どのように温度が伝わっていくのかがわかる．上記の式は 3 次元の場合であるため, 簡単のため, 以下のような 1 次元で解くことで考える．

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

そしてこの式を解くには初期条件と境界条件という前もって与えられた条件が必要なのである．

1.2　初期条件

初期条件とは, 時刻 $t=0$ における温度分布で与えられる．

$$\theta(0,x) = f(x)$$

と表せる．$f(x)$ は, 時刻 $t=0$ における任意の場所 x の温度分布であり, ここからどのように熱が伝わっていくのかを考える元となる関数である．

1.3　境界条件

初期条件に加え, 端点における状態を境界条件として与えないと, 解が唯一にならない．

$\theta(t,0) = \theta(t,a) = 0$ (今回端点は $x=0, x=a$ とする．)

のように表せる．

2　フーリエ級数

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を与えられた関数とする．その定義域 $[a,b]$ は有界区間とする．変数変換 $x = -\pi + \dfrac{2\pi}{b-a}(x'-a)$ $(a \le x' \le b)$ を用いれば, $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ と仮定することができる．このとき,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

が成り立つ．ここで a_n, b_n は実数の定数であり, 次のように与えられる．

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

今後の課題

今回は, フーリエ級数のところに時間がかかり, 熱方程式の解法にあまり時間を割けなかった．今後, 境界条件を変化させたり, 1 次元の場合以外を考えていきたいと思う．

3　参考文献

[1] 日常現象からの解析学 2016 年．岡本 久
[2]`http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/nisikozo/s5node42.html`　1 次元の熱伝導問題 2016 年 [3]`http://www.eng.hokudai.ac.jp/labo/soilmech/lectures/AM2/PPT10.pdf`　偏微分方程式 (4) 熱伝導方程式