位相とその例

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV15005 石川直幹

平成 29 年 11 月 3 日

研究動機

芝浦祭の研究発表の準備をしていたところ, 自身の位相の理解が十分でないことが致命的となり, 研究が止まってしまった. それを受け, 今回は位相について, 例を多く取り上げながら, 勉強したので, その内容をまとめた.

1　位相空間

1.1　位相の基本概念

定義 1.1　$X \neq \emptyset$, $\mathcal{O}$: ベキ集合 $P(x) = 2^X$ の部分集合とすると $\mathcal{O}$ が次の条件

(O_1) $X \in \mathcal{O}$, $\emptyset \in \mathcal{O}$.

(O_2) $O_1, \ldots, O_k \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap \cdots \cap O_k \in \mathcal{O}$.

(O_3) $(O_\lambda | \lambda \in \Lambda) \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

を満たすとき, 集合 X の**位相**といい, 位相が定義された集合 $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間**という. また, 位相 $\mathcal{O}$ の元を $(X, \mathcal{O})$ の**開集合** ($\mathcal{O}-$ 開集合) といい, $(X, \mathcal{O})$ の部分集合が**閉集合** ($\mathcal{O}-$ 閉集合) とは, その補集合が開集合であることと定義する.

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の $\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathscr{B}$ について, どんな $\mathcal{O}$-開集合 O に対しても, $\mathscr{B}$ のある部分集合 $\mathscr{B}_0$ を選んで,

$$O = \cup \mathscr{B}_0$$

とできるとき, $\mathscr{B}$ を位相 $\mathcal{O}$ の**開基**であるという. また, $(X, \mathscr{O})$ の $x \in X$ の近傍系 $\mathfrak{N}(x)$ の部分集合 $\mathfrak{B}(x)$ について, $N \in \mathfrak{N}(x)$ ならば, $U \subset N$ となる元 $U \in \mathfrak{B}$ が常に存在するとき, $\mathfrak{B}$ を点 x の**基本近傍系**という. 点 x の開近傍の全体, すなわち, 点 x を含む $\mathcal{O}$-開集合の全体は点 x の基本近傍系である.

定義 1.2　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において, 任意の開被覆 $\mathcal{U}$ が必ず高々可算個の部分被覆 $\mathcal{U}'$ をもつとき, $(X, \mathcal{O})$ は **Lindelöf** であるという.

コンパクトは任意の開被覆 $\mathcal{U}$ が必ず有限個の部分被覆 $\mathcal{U}'$ をもつので, コンパクトならば Lindelöf であることが分かる.

1.2　可算公理と分離公理

定義 1.3　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の各点が高々可算個の近傍からなる基本近傍系を持つとき, $(X, \mathcal{O})$ および $\mathcal{O}$ は**第 1 可算公理**を満たすという. また, $\mathcal{O}$ が高々可算個のからなる開基を持つとき, $(X, \mathcal{O})$ および $\mathcal{O}$ は**第 2 可算公理**を満たすという.

定義 1.4　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次の条件

(T_4) $^\forall A_1, A_2$:閉集合 $(A_1, A_2 \subset X, A_1 \cap A_2 = \emptyset)$,
$^\exists O_1, O_2$:開集合 s.t. $A_1 \subset O_1, A_2 \subset O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

を**第 4 分離公理**または Tietze の公理といい, $^\forall x, y \in S$ に対し, x の近傍で y を含まないものが存在していて, かつ (T_4) を満たす位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を **T_4-空間**または**正規空間**という.

また, 正規空間であることと, $\mathcal{O}$-閉集合 F と $\mathcal{O}$-開集合 G について,

$$F \subset G \;\Rightarrow\; F \subset U, \overline{U} \subset G$$

となる. F, G が存在することは同値である.

2　Sorgenfray 直線

位相学において代表的な反例として Sorgenfray 直線がある. Sorgenfray 直線の性質としては, 主に,

1. 第 1 可算公理を満たすが, 第 2 可算は満たさない.
2. Lindelöf であるが, 第 2 可算公理を満たさない.
3. 正規空間であるが, 直積は正規空間ではない.

が挙げられる. 今回は, Sorgenfray 直線が上の性質をもつことの証明を主に発表する.

定義 2.1 (Sorgenfrey 直線)　$X = \mathbb{R}$ 上に半開区間

$$\mathscr{B}_{Sor} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

で開基を定め, これによって位相を定めた位相空間を **Sorgenfrey 直線**という.

今後の課題

今回は, 同相写像や連結性に対する議論がほとんどできなかったので, 豊富な例と合わせて勉強したい. また, 個人的に興味のある代数学や解析学に, 今回学んだ位相の知識や経験を生かしていきたい.

参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2008 年.

[2] 内田伏一, 集合と位相, 裳華房, 2015 年.

[3] 川崎徹郎, 位相空間, `pc1.math.gakushuin.ac.jp/~kawasaki/16isoukuukan.pdf`, 2017/11/02 最終アクセス.