流体力学

芝浦工業大学　数理科学研究会
小池智人

平成 29 年 11 月 3 日

研究背景

よく知られている方程式の中には Navier-Stokes 方程式がある. 流体を記述する方程式であり, 未だに解明されていない問題が多い方程式である. 今回はこの方程式に関連して河口から海へと流れる水量について扱われる JH 流を取り扱いたい.

1　Navier-Stokes 方程式について

流体は時間変数 t と空間変数 $x = (x_1, x_2, x_3)$ の 4 変数で記述される. x における流体の速度ベクトルを $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, 流体中の圧力を p, 流体の質量密度を ρ, 動粘性係数を ν, 外力を $\mathbf{f}$ としたとき, Navier-Stokes 方程式は次で表される：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}$$

但し, Δ：Laplace 作用素. $\mathbf{f} \equiv 0$ であり, 時間 t に依存しないベクトル場であるとき,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

を満たし, **定常** Navier-Stokes **方程式**という.

def 1　Navier-Stokes 方程式に従う流体を**非圧縮粘性流体**と呼ぶ. Euler 方程式に従う流体を**完全流体** (perfect fluid) と呼ぶ

非線形項を無視した場合の方程式は Stokes 方程式と呼ばれ, ゆっくりとした運動に関して用いることもできる.

def 2　3 次元ベクトル場 $\mathbf{v}$ に対して,

$$\omega = \operatorname{curl} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$$

を**渦度** (vorticity) という.

Navier-Stokes 方程式に curl を作用させたものを**渦度方程式**という.

def 3　固定した時刻 t に関して, ベクトル場 $\mathbf{v}$ の積分曲線を**流線** (streamline) という：

$$\frac{d}{ds}\mathbf{x}(s) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(s)).$$

$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ となる点 $\mathbf{x}$ を**淀み点** (stagnation) と呼び, この場合も 1 点からなる流線である.

def 4　ベクトル場 $\mathbf{v}(t, x)$ に対し,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

の解を $\mathbf{x}_0$ を通る粒子の**軌道** (particle trajectory) と呼ぶ.

def 5　次を満たす一価関数 φ が存在するとき, φ を**流れ関数** (stream function) と呼ぶ：

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad v_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

2　(N.E) の定常解

Navier-Stokes 方程式は解の存在性, 一意性, 無限遠点での漸近挙動を扱った問題を考える．そのために Lebesgue 空間や Sobolev 空間を用いる. これらを用いた考察により基本解を表すことはできるが, 有界領域における N.E の解について充分な解析には至っておらず, 未解決問題として挙げられている.

3　Jeffery-Hamel 流

河口における海へ流れる水量のモデルとして, Jeffery-Hamel 流 (JH 流) がある.

扇形の領域：$\Omega = \{(r, \theta) \mid 0 < r < \infty, -\alpha < \theta < +\alpha\}$　$(\alpha \in (0, \pi))$ に対し, 2 次元 Navier-Stokes 方程式に (r, θ, z) で極座標変換を行い, $(v_r, v_\theta, v_z) = \left(\frac{f(\theta)}{r}, 0, 0\right)$ を適用させると, 式の簡略化をすることができ,

$$p = \frac{2\nu\rho}{r^2} f(\theta) + C \qquad (C\text{：定数})$$

を得る. 更に, $g = \nu^{-1} f$ とすると, 流量

$$Q = \nu \int_{-a}^{a} g(\theta)\, d\theta$$

を考えることが出来る. 但し, $R \equiv Q/\nu$ は Reynolds 数である.

def 6　全ての $\theta \in (-\alpha, \alpha)$ について $g(\theta) > 0$ を満たす解を**純湧き出し** JH **流**, $g(\theta) < 0$ を満たす解を**純吸い込み** JH **流**と呼ぶ.

JH 流の一般化として, Oseen の流れが用いられる.

def 7　Oseen **の流れ**は極座標変換：

$$\phi = -\frac{2}{a^2 + b^2}(a \log r + b\theta), \qquad \chi = \frac{2}{a^2 + b^2}(b \log r - a\theta)$$

としたとき, $\psi = f(\phi) + c\chi$ と書けるものをいう $(a, b, c\text{：定数})$.

今後の課題

今回は Navier-Stokes 方程式における解析としてあまり扱っておらず, 実際の流体の例の一つを用いたが, 流体の記述としても流れの種はいくつか存在しているのでそれらについても扱っていきたいように思う.

参考文献

[1] 岡本久, ナヴィエ-ストークス方程式の数理, 東京大学出版会, 2009 年.